

PERSAMAAN GERAK VERTIKAL KE BAWAH DIPENGARUHI GAYA GESEK UDARA MENGGUNAKAN THEOREMA LAGRANGE

Bambang Supriadi^{1*}, Haniyah Alivia², Ratih Wahyudianti³, Amar Ma'ruf Al Bawani⁴
Program Studi Pendidikan Fisika, FKIP, Universitas Jember, Indonesia^{1,2,3,4}

bambangsupriadi.fkip@unej.ac.id

Submitted June 8, 2023; Revised November 6, 2023; Accepted November 21, 2023

Abstrak

Banyak konsep fisika yang masih belum dijelaskan menggunakan persamaan mekanika, seperti Newtonian dan Lagrangian, khususnya dalam konteks gerak vertikal ke bawah. Penelitian ini menginvestigasi aspek gerak vertikal ke bawah yang dapat terpengaruh oleh gaya gesekan udara atau tidak. Untuk mengkaji fenomena ini, kami merinci dan membandingkan persamaan Newtonian dan Lagrangian. Selain itu perlunya studi literatur yang luas tentang mekanika klasik, termasuk teori-teori tersebut (Newtonian, Lagrangian, dan Hamiltonian). Metode yang digunakan pada kajian ini yaitu kajian teoritis matematis dengan melakukan perhitungan persamaan gerak vertikal ke bawah menggunakan persamaan diferensial parsial dari persamaan Lagrangian untuk memperoleh persamaan gerak vertikal ke bawah yang dipengaruhi oleh gaya gesekan udara. Hasil penelitian ini mengungkapkan tiga persamaan Lagrange, yaitu pada persamaan percepatan, kecepatan, dan posisi dalam konteks gerak vertikal yang dipengaruhi gaya gesek udara.

Kata Kunci : Gerak vertikal ke bawah, lagrangian, gaya gesek udara

Abstract

Many physics concepts are still not explained using mechanical equations, such as Newtonian and Lagrangian, especially in the context of downwardly vertical motion. This research investigates aspects of downwardly vertical motion that may or may not be affected by air friction. To examine this phenomenon, the researchers detail and compare the Newtonian and Lagrangian equations. Apart from that, there is a need for extensive literature studies on classical mechanics, including these theories (Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian). The method used in this study is a mathematical theoretical study by calculating the equation of downwardly vertical motion using partial differential equations from the Lagrangian equation to obtain the equation of downwardly vertical motion which is influenced by air friction. The results of this research reveal three Lagrange equations, namely the equations for acceleration, speed and position in the context of vertical motion which are influenced by air friction.

Keywords : Downwardly vertical motion, lagrangian, air friction

1. PENDAHULUAN

Fisika merupakan ilmu pengetahuan dengan bahasan mengenai gejala atau berbagai fenomena alam secara nyata maupun sebagai interaksi yang terjadi pada lingkungannya. Salah satu cabang kajian fisika adalah mekanika yang mengkaji gerak pada suatu objek atau benda yang terbagi menjadi dua bahasan yaitu kinematika dan dinamika [1]. Kinematika merupakan studi yang membahas gerak dan sistem benda meliputi posisi, kecepatan, dan percepatan tanpa mengkaji penyebab benda tersebut

bergerak [2]. Sedangkan dinamika merupakan studi yang membahas mengenai penyebab benda bergerak meliputi gaya-gaya yang mempengaruhi gerak benda dan sistem yang bergerak seperti perubahan arah, perubahan bentuk, dan perubahan kecepatan [3]. Kinematika digunakan sebagai dasar sebelum mempelajari dinamika, adapun kajian dalam kinematika membahas tentang gerak lurus beraturan (GLB) dan gerak lurus berubah beraturan (GLBB) [4].

Gerak vertikal ke bawah merupakan gerak benda secara vertikal yang dipengaruhi oleh percepatan gravitasi bumi dengan kecepatan awal $v_0=0$ m/s [5]. Gerak vertikal ke bawah merupakan salah satu kajian kinematika. Benda dikatakan mengalami gerak vertikal ke bawah apabila benda tersebut dilepaskan dari suatu ketinggian tertentu terhadap tanah dengan adanya kecepatan awal (v_0). Benda yang bergerak vertikal ke bawah dalam kajian fisika klasik dimana keseluruhan dalam pergerakannya, maka pada benda tersebut mengalami percepatan konstan harus sama dengan percepatan gravitasinya [5]. Namun, pada permasalahan-permasalahan olimpiade fisika dan di kehidupan nyata, benda yang bergerak vertikal ke bawah tidak hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi saja, melainkan juga dipengaruhi oleh gaya gesekan udara yang bekerja pada sistem gerak vertikal ke bawah.

Pada gerak vertikal ke bawah, pecepatan yang konstan dikenal dengan percepatan akibat faktor gravitasi dan dilambangkan dengan simbol g , sebab g ialah magnitude daripada besaran vector yang selalu bernilai positif (+). Pada suatu benda yang dilemparkan vertical ke bawah dengan kecepatan awal akan dipengaruhi dengan adanya percepatan. Sehingga, jika gerak vertical ke bawah diformulasikan ke dalam rumus dapat ditulis sebagai berikut:

$$v_t = v_0 + g \cdot t \quad (1)$$

Sedangkan untuk menentukan ketinggian (h) dengan menggunakan rumus gerak vertical ke bawah adalah sebagai berikut:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Jika ingin mengetahui kecepatan suatu benda yang bergerak vertical ke bawah dari ketinggian tertentu, maka rumus yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$v_t^2 = v_0^2 + 2 g \cdot h \quad (3)$$

Persamaan gerak vertikal ke bawah yang dipengaruhi gaya gesek udara dapat dikaji menggunakan persamaan Lagrange. Kajian gerak vertikal ke bawah menggunakan persamaan Lagrange penting digunakan pada bahan ajar SMA terutama ketika menganalisis jumlah gaya yang banyak dan memiliki arah yang berubah-ubah dalam suatu sistem [7]. Persamaan Lagrange merupakan pengembangan formulasi mekanika klasik yang diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange pada tahun 1788 [8]. Persamaan Lagrange meninjau sistem dari aspek energi total, yaitu energi kinetik dan energi potensial [9]. Fungsi Lagrange dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L = T - V \quad (4)$$

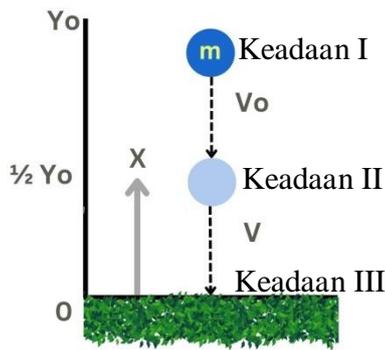
Sehingga persamaan Lagrange sebagai berikut [10]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (5)$$

Penelitian ini guna menganalisis persamaan gerak vertikal ke bawah yang dipengaruhi dan tidaknya gaya gesek udara menggunakan thorema lagrangian.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada kajian ini menggunakan studi literatur yang luas tentang mekanika klasik dengan pendekatan teoritis matematis melalui perhitungan persamaan gerak vertikal ke bawah menggunakan persamaan diferensial parsial dari persamaan Lagrangian untuk memperoleh persamaan gerak vertikal ke bawah yang dipengaruhi oleh gaya gesekan udara dan tidak dipengaruhi gaya gesekan udara. Ilustrasi gerak vertikal ke bawah ditunjukkan pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Konsep Sederhana Gerak Vertikal ke Bawah

Pada sistem gerak vertikal ke bawah Gambar 1. di atas, dengan menggunakan persamaan lagrangian berlaku perubahan energi yaitu energi kinetik menjadi energi potensial, maka diperoleh persamaan (6) dan (7) sebagai berikut.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6)$$

$$V = -mgx \quad (7)$$

Keterangan:

T = Energi Kinetik (Joule)

V = Energi Potensial (Joule)

m = massa benda (kg)

v = Kecepatan benda (m/s)

g = gaya gravitasi (m/s^2)

x = Posisi benda (m)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan sistem gerak vertikal ke bawah di atas, pada keadaan I kecepatan benda $v_0 = 0 m/s$, dengan substitusi persamaan (1) dan (2), fungsi Lagrange pada keadaan I sebagai berikut:

$$L = mgy \quad (8)$$

Pada keadaan II besar energi kinetik sama dengan besar energi potensial $T = V$, sehingga fungsi Lagrange pada keadaan II sebagai berikut:

$$L = 0 \quad (9)$$

Pada keadaan III ketinggian benda $y = 0 m$, sehingga energi potensial pada keadaan dasar $V=0$ berubah menjadi energi

kinetik, fungsi Lagrange pada keadaan III sebagai berikut:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (10)$$

Jadi, persamaan Lagrange pada gerak vertikal ke bawah dari tiga keadaan tersebut, dapat dinyatakan sebagai berikut:

a) Gerak vertikal ke bawah tanpa gaya gesek udara

Persamaan gerak vertikal ke bawah pada persamaan Langrange:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

Selanjutnya gunakan persamaan (5) yaitu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$ dimana jika tanpa adanya gaya gesek udara, maka:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \cdot \frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

Sehingga dapat disubstitusikan menjadi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} - (mg) = 0$$

$$\ddot{x} = g$$

Maka, diperoleh:

- 1) Percepatan gerak vertikal ke bawah

$$\ddot{x} = g \quad (11)$$

- 2) Kecepatan gerak vertikal ke bawah

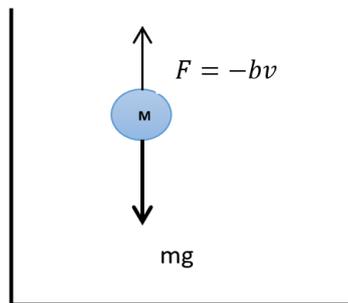
$$\dot{x} = gt + C \quad (12)$$

3) Posisi gerak vertikal ke bawah

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C \quad (13)$$

b) Gerak vertikal ke bawah dengan gaya gesek udara

Pada gerak vertikal ke bawah dengan gaya gesek udara, dapat diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 2. Komponen gaya gesek udara pada gerak vertikal ke bawah

Sehingga, dari Hukum II Newton, didapatkan:

$$\begin{aligned} \sum F &= m \cdot a \\ w - f &= m \cdot a \\ m \cdot g - bv &= m \cdot a \end{aligned}$$

Jika, persamaan tersebut direpresentasikan ke dalam fungsi Lagrange $a = \ddot{x}$ menjadi:

$$\begin{aligned} m \cdot g - b\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} &= g - \frac{b}{m}\dot{x} \end{aligned} \quad (14)$$

Sedangkan, jika menggunakan persamaan Lagrange pada gerak vertikal ke bawah:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan persamaan diferensial $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$ dengan adanya pengaruh gaya gesek udara ($F = -bv$), maka:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= -b\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - mg &= -b\dot{x} \\ m\ddot{x} &= mg - b\dot{x} \\ \ddot{x} &= g - \frac{b}{m}\dot{x} \end{aligned}$$

Maka, diperoleh:

1) Percepatan gerak vertikal ke bawah

$$\ddot{x} = g - \frac{b}{m}\dot{x} \quad (15)$$

2) Kecepatan gerak vertikal ke bawah

$$\dot{x} = gt - \left(\frac{b}{m}x \right) + C \quad (16)$$

3) Posisi gerak vertikal ke bawah

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{b}{m}x + C \quad (17)$$

4. SIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan yang telah dikaji, persamaan gerak vertikal ke bawah tanpa adanya pengaruh gaya gesek udara dan persamaan gerak vertikal ke bawah yang dipengaruhi gaya gesek udara dapat diperoleh menggunakan persamaan Lagrangian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F.Y.H. Suharsono, W. Kusuma, F. Ummah, E. B. Ramadhan, B. Supriadi, "Metode Magic Number untuk Penyelesaian Soal - Soal Energi Kinetik Relativistik," *Science and Physics Education Journal (SPEJ)*, vol. 5, no. 2, pp. 40-46, 2022, doi:10.31539/spej.v5i2.3853
- [2] H. Ruspitasari, S. Supeno, and Y. Yushardi, "Kajian Kinematika Gerak pada Gerak Kendaraan Bermotor di Jalan Kabupaten Ngawi sebagai Sumber Belajar Fisika,"

- ORBITA J. Kajian, Inov. dan Apl. Pendidik. Fis.*, vol. 8, no. 2, p. 282, 2022, doi: 10.31764/orbita.v8i2.9035.
- [3] Azhari and H. A. Sianturi, *Buku Ajar Fisika Dasar Bagian 1*. Pekalongan: Nasya Expanding Management, 2021. [Online]. Available: https://www.google.co.id/books/edition/Buku_Ajar_Fisika_Dasar/IG5LEAAAQBAJ?hl=id&gbpv=1
- [4] I. D. Handayani, S. Bektiarso, and S. Astutik, "Kajian Kinematika Jalur Wisata Gunung Bromo Melalui Senduro- Lumajang sebagai E-Suplemen Bahan Ajar Fisika SMA.," *FKIP e-PROCEEDING, 2019 - J. unej*, vol. 4, no. 1, pp. 146–151, 2019.
- [5] N. Yuningsih and Y. C. Dewi, "Gaya Gesekan Udara Terhadap Benda yang Bergerak Vertikal Tanpa Kecepatan Awal," *Pros. Ind. Res. ...*, pp. 13–14, 2022, [Online]. Available: <https://jurnal.polban.ac.id/ojs-3.1.2/proceeding/article/view/4337%0Ahttps://jurnal.polban.ac.id/ojs-3.1.2/proceeding/article/view/4337/2899>
- [6] I. T. Emor, A. H. Mandolang, and J. Lolowang. "Penggunaan Kinemaster dan Quizziz dalam Pembelajaran Fisika untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa," *Charm Sains: Jurnal Pendidikan Fisika*, vol.3, no.2, pp. 54-59, 2022, doi:10.53682/charmsains.v3i2.158
- [7] A. Muzakki, I. N. Ramadhanti, I. N. Alifiyan, and T. S. Ayu, "Kajian Model Pembelajaran Fisika SMA pada Topik Kinematika Gerak Lurus," *Mitra Pilar J. Pendidikan, Inovasi, dan Terap. Teknol.*, vol. 1, no. 2, pp. 85–98, 2022, doi: 10.58797/pilar.0102.04.
- [8] Y. Ariyanti, P. Subekti, and H. Syahropi, "Studi Literatur : Mekanika Lagrange," vol. 15, no. 1, pp. 55–58, 2022.
- [9] M. Ariska. "Penyelesaian Dinamika Pesawat Atwood dengan Persamaan Euler-Lagrange Sebagai Alternatif Persamaan Newton pada Fisika SMA," *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika (JIPF)*, vol. 06, no. 1, pp. 62-69, 2019, doi:10.36706/jipf.v6i1.7816
- [10] S.S. Zahra, I. H. Syahbana, M. O. Wiyadnyana, and F. Anggraini, "Analisis Ayunan Pendulum Menggunakan Aplikasi Phypox pada Materi Fisika Kelas X," *Mitra Pijar: Jurnal Pendidikan, Inovasi, dan Terapan Teknologi*, vol. 1, no. 2, pp. 43-64, 2022, doi:10.58797/pilar.0102.02