Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210

Graf Pendulum Dengan Pelabelan *Graceful*Super Fibonacci

Rifki Ristiawan
Program Studi Informatika
Fakultas Teknik, dan Ilmu Komputer
Universitas Indraprasta PGRI
Jl.Nangka No.58C, Tanjung Barat,Jagakarsa,Jakarta Selatan 12530
Email: rifki2889@gmail.com

Abstrak

Telah diterbitkan beberapa artikel yang terkait dengan pelabelan graf dengan menggunakan pelabelan *Graceful* Fibonacci maupun *Graceful* Super Fibonacci. Kathiresan dan Amutha mengemukakan ide mengenai pelabelan *graceful* Fibonacci dan pelabelan *graceful* Super Fibonacci sebagai fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3,4,\dots,F_q\}$ (dimana F_q adalah bilangan Fibonacci ke-q) dikatakan *Fibonacci graceful* jika $f^*: E(G) \rightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ bersifat bijektif. Dan suatu fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, F_1, F_2, \dots, F_q\}$ (dimana F_q adalah bilangan Fibonacci ke-q)disebut *Super Fibonacci Graceful* jika pelabelan busur $f^*: E(G) \rightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ bersifat bijektif. Pada artikel ini diperkenalkan graf Pendulum, dan pelabelan graf tersebut dengan menggunakan pelabelan Super Fibonacci.
Kata Kunci : Pelabelan Graf, *Graceful*, Super Fibonacci

Abstract

There have been published papers related to graph labeling using Fibonacci Graceful or Super Fibonacci Graceful labeling. Kathiresan and Amutha put forward the idea of the graceful labeling of Fibonacci and the Super Fibonacci graceful labeling as a function of $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3,4,\dots,F_q\}$ (where F_q is the q-number of Fibonacci) is said to be Fibonacci graceful if $f^*: E(G) \rightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ defined by $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ is bijective. And a function $f: V(G) \rightarrow \{0, F_1, F_2, \dots, F_q\}$ (where F_q is the q-number of Fibonacci) is called Super Fibonacci Graceful if edge labeling $f^*: E(G) \rightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ defined by $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ is bijective. In this paper, the Pendulum graph is introduced, and labeling the graph by using Super Fibonacci labeling.
Keywords: Graph Labeling, Graceful, Super Fibonacci

PENDAHULUAN

Manusia dan permasalahan dalam kehidupannya sehari–hari mendorong setiap individu untuk menemukan solusi terhadap masalah tersebut, dan secara tidak langsung permasalahan tersebut mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan salah satu yang dapat dijadikan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang matematika yang dapat dijadikan alternatif adalah teori graf. Sebagai contoh, Chakraborty dan Dutta (2018) mengaplikasikan teori graf dalam analisis penggunaan media sosial yaitu dengan cara mengekstraksi pengetahuan dari data yang tidak terstruktur, pengetahuan yang diperoleh memberi kejelasan tentang berbagai interaksi dan hubungan antar berbagai individu di media sosial.

Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210

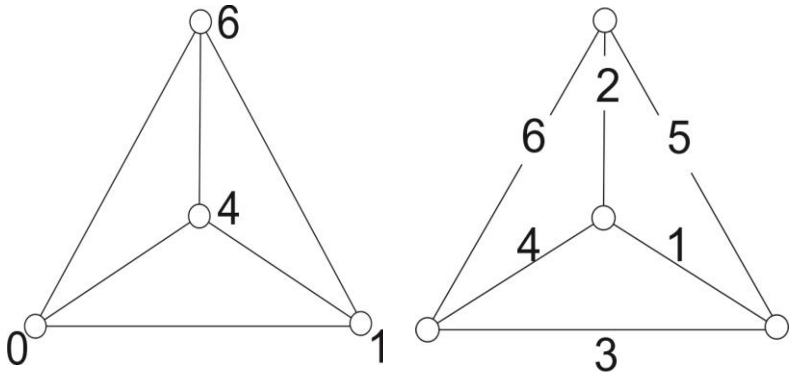
Teori graf pertama kali diperkenalkan dan dikembangkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia dalam sekali waktu. Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam suatu artikel yang berjudul *Solution problematis ad geometrian situs pertinensi*. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dengan istilah graf dalam menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai (Sutarno dkk., 2003: 58).

Aplikasi pelabelan graf dapat dijumpai dalam berbagai bidang diantaranya desain sirkuit dasar, radar, transportasi, ilmu kimia, navigasi geografis, penyimpanan data komputer, desain *integrated circuit* pada komponen elektronik dan desain jaringan komunikasi. Saat ini telah ditemukan beberapa pelabelan graf diantaranya *graceful, harmonius, felicitous, elegant, cordial, magic, antimagic, bimagic,* pelabelan bilangan prima dan lain-lain. Pelabelan graf (*Graph Labeling*) dilakukan dengan memetakan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bilangan bulat positif atau non negatif (Wallis, 2007). Jika suatu pelabelan hanya menggunakan domain berupa titik maka disebut pelabelan titik, dan apabila 2 domainnya berupa himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi. Jika domainnya berupa himpunan titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*) .

Pelabelan *graceful* adalah salah satu pelabelan yang paling terkenal dan berkembang saat ini. Ada beberapa macam pelabelan *graceful*, diantaranya adalah pelabelan *graceful* sisi, pelabelan *graceful* titik, pelabelan *graceful* kuat, pelabelan super sisi *graceful*, dan dalam artikel ini pelabelan yang digunakan adalah pelabelan *graceful* Super Fibonacci. Saat ini telah terbit beberapa artikel tentang pelabelan *graceful* Fibonacci dan *graceful* Super Fibonacci. Sridevi dan Navaneethakrishnan (2011) dalam artikelnya membahas mengenai beberapa kelas graf dengan pelabelan *graceful* Fibonacci dan Super Fibonacci diantaranya adalah pelabelan *Fan*, *cycle*($n \equiv 0(mod\ 3)$), *caterpillars* dan *Friendship*.

Pelabelan simpul yang dikenal dengan "*Graceful* Labeling" menurut Galian (2013) dikembangkan oleh Rosa pada tahun 1967 hingga saat ini, ditemukan beberapa teknik baru yang diilhami dari teknik pelabelan tersebut. Diantaranya pelabelan Harmonis, pelabelan Elegant, pelabelan busur *graceful*, pelabelan *graceful* ganjil (*odd labeling*) dll. Galian merangkum atau mengumpulkan jenis-jenis pelabelan yang telah ditemukan tersebut.

Secara umum, pelabelan pada graf adalah pemetaan yang memetakan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (*edge*) atau himpunan titik (*vertex*) ke bilangan-bilangan bilangan bulat positif atau non negative. Rosa (dalam Wallis, 2007) memperkenalkan pelabelan β atau yang saat ini dikenal sebagai pelabelan *graceful*. Pelabelan *graceful* pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu f dari himpunan semua simpul ke bilangan bulat $S_G = \{0,1,\dots,|E(G)|\}$ sedemikian sehingga setiap anggota bukan nol dari S_G terjadi sebagai perbedaan antara label pada titik akhir dari suatu busur. Jika diperluas f untuk bususr dengan mendefinisikan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ maka setiap elemen dari $\{1,2,\dots,|E(G)|\}$ muncul tepat satu kali untuk label-label busur. Suatu graf disebut *graceful* jika graf tersebut menggunakan pelabelan *graceful*.



Gambar 1. Pelabelan *graceful* dari K_4

Pada artikel ini notasi $G = (V(G), E(G))$ menyatakan graf yang sederhana, berhingga, dan terhubung, yang memiliki p simpul dan q busur. untuk istilah dan beberapa notasi yang lain, pada artikel ini menyesuaikan dengan artikel yang telah ada sebelumnya, yaitu *Fibonacci and Super Fibonacci Graceful Labeling of Some Graphs* dari Vaidya & Vihol (2011) dan *Super Fibonacci Graceful Labeling* dari Sridevi, Navaneethakrishnan, & Nagarajan (2010)

Fungsi f adalah pelabelan *graceful* dari graf G dengan busur q jika f injektif dari himpunan simpul yang terdapat di G ke himpunan $\{0,1,2,\dots.,q\}$ sedemikian sehingga ketika busur uv diberi label dengan $|f(u) - f(v)| = \{1,2,\dots q\}$, label pada tiap busur akan berbeda. Vidya dan Vihol (2011) memberikan beberapa definisi yang terkait dengan pelabelan Fibonacci dan super Fibonacci.

Definisi 1

Bilangan Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \dots.$ didefinisikan dengan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dan $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots.,$

Definisi 2

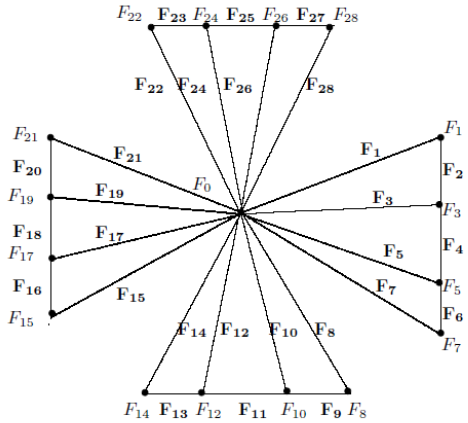
Fungsi $f: V(G) \to \{0,1,2,3,4,\dots,F_q\}$ (dimana F_q adalah bilangan Fibonacci ke-q) dikatakan *fibonacci graceful* jika $f^*: E(G) \to \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ adalah bijektif.

Definisi 3

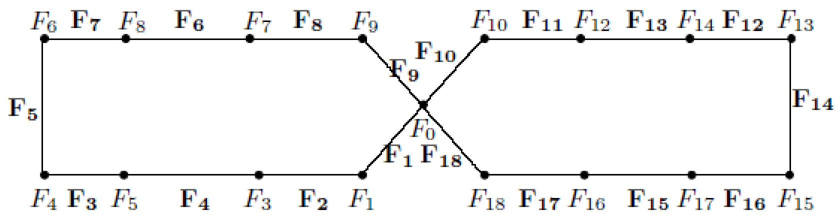
Fungsi $f: V(G) \to \{0, F_1, F_2, \dots, F_q\}$ (dimana F_q adalah bilangan Fibonacci ke-q)disebut *super fibonacci graceful* jika pelabelan busur $f^*: E(G) \to \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ yang didefinisikan dengan $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ bijektif.

Beberapa graf dengan pelabelan *super fibonacci graceful* adalah sebagai berikut :

Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210



Gambar 2. F_4^4 **adalah graf super fibonacci (**F_n^t**untuk setiap** $n \geq 2$)



Gambar 3. C_n^t **adalah** ***super fibonacci graceful*** **(**C_n^t **untuk** $n \equiv 0$ **(mod 3))**

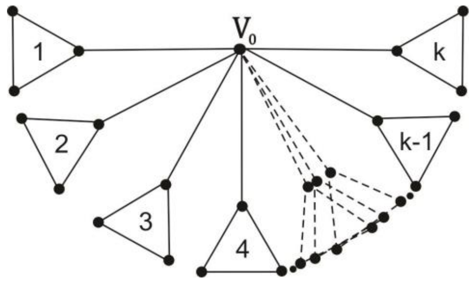
METODE

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah melalui studi kepustakaan dengan mempelajari jurnal, buku dan penelitian sebelumnya yang berkaitan untuk digunakan sebagai dasar teori dalam menentukan pelabelan *graceful* untuk graf pendulum.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Graf Pendulum

Graf pendulum adalah suatu graf yang terdiri dari graf lingkaran (*cycle*) yang dihubungkan dengan satu *path* ke simpul pusat V_0. Pada artikel ini lingkaran yang yang digunakan dalam pelabelan pendulum adalah C_3. Bentuk pendulum dengan $k - cycle$ dapat dilihat pada Gambar 1



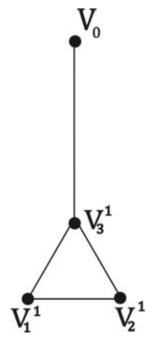
Gambar 4. Graf Pendulum dengan-*k cycle*

Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210

2. Pelabelan Graf Pendulum dengan Pelabelan Super Fibonacci

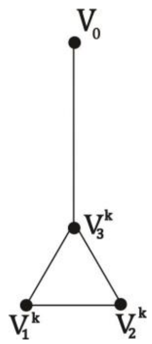
Pelabelan yang digunakan pada pendulum adalah pelabelan simpul, konstruksi dalam pelabelan dari suatu pendulum C_3 adalah sebagai berikut:

a. Pelabelan pada satu pendulum seperti yang terlihat pada Gambar 2 dimulai dari simpul sebelah kiri bawah (V_1) dan simpul selanjutnya yang diberi label adalah simpul terdekat yang berlawanan arah putaran jarum jam (V_2) kemudian (V_3) .



Gambar 5. Pelabelan simpul pada satu pendulum

b. Pelabelan yang diberi untuk pendulum ke-k (Gambar 6) adalah sebagai berikut

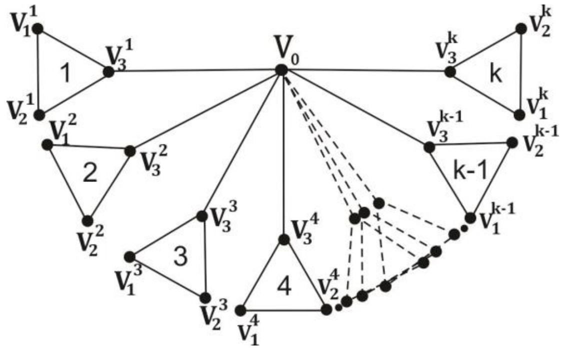


Gambar 6. pelabelan pendulum ke-k

c. Urutan pelabelan untuk k −buah pendulum dapat dilakukan sembarang, namun untuk lebih memudahkan, pelabelan dilakukan dari pendulum paling kiri atau dilakukan dari kiri ke kanan. Notasi simpul pada pada $k - pendulum$ dapat dilihat pada Gambar 7.
Fungsi pelabelan untuk k −buah pendulum adalah:

$$f(V_1^k) = F_{4k-2} \ , \quad k = 1,2,3, \dots, n$$
$$f(V_2^k) = F_{4k-1} \ , \quad k = 1,2,3, \dots, n$$
$$f(V_3^k) = F_{4k} \ , \quad k = 1,2,3, \dots, n$$

Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210



Gambar 7. Notasi Simpul pada $k-$ pendulum

Teorema

Graf pendulum adalah graf *graceful* super fibonacci

Bukti

$$E_1^k = \{f^*(v_1^k, v_2^k)\} = \{|f(v_1^k) - f(v_2^k)|, untuk\ 1 \le k \le n\}$$
$$= \{|F_2 - F_3|, |F_6 - F_7|, \dots, |F_{4n-6} - F_{4n-5}|, |F_{4n-2} - F_{4n-1}|\}$$
$$= \{F_1, F_5, F_9, \dots, F_{4n-7}, F_{4n-3}\}$$
$$E_2^k = \{f^*(v_1^k, v_3^k)\} = \{|f(v_1^k) - f(v_3^k)|, untuk\ 1 \le k \le n\}$$
$$= \{|F_2 - F_4|, |F_6 - F_8|, \dots, |F_{4n-6} - F_{4n-4}|, |F_{4n-2} - F_{4n}|\}$$
$$= \{F_3, F_7, F_{11}, \dots, F_{4n-5}, F_{4n-1}\}$$
$$E_3^k = \{f^*(v_0\ , v_3^k)\} = \{|f(v_0\ ) - f(v_3^k)|, untuk\ 1 \le k \le n\}$$
$$= \{|F_3 - F_4|, |F_7 - F_8|, \dots, |F_{4n-5} - F_{4n-4}|, |F_{4n-1} - F_{4n}|\}$$
$$= \{F_3, F_7, F_{11}, \dots, F_{4n-6}, F_{4n-2}\}$$
$$E_4^k = \{f^*(v_2^k, v_3^k)\} = \{|f(v_2^k) - f(v_3^k)|, untuk\ 1 \le k \le n\}$$
$$= \{|F_0 - F_4|, |F_0 - F_8|, \dots, |F_0 - F_{4n-4}|, |F_0 - F_{4n}|\}$$
$$= \{F_4, F_8, F_{12}, \dots, F_{4n-4}, F_{4n}\}$$

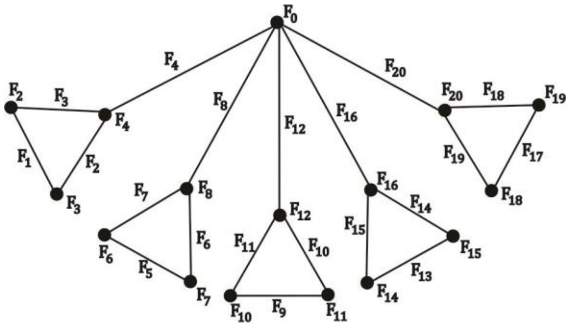
Sehingga $E^k = E_1^k \cup E_2^k \cup E_3^k \cup E_4^k$

$$= \{F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{4n-3}, F_{4n-2}, F_{4n-1}, F_{4n}\}. \blacksquare$$

F_k adalah bilangan Fibonacci ke-k dengan $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots$
Dari pelabelan ini dapat dilihat bahwa pelabelan simpul $f: V \to \{0, F_1, F_2, \dots\}$ menginduksi pelabelan busur $f^*: E \to \{F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3, \dots\}$

Pelabelan simpul untuk 5 pendulum dengan pelabelan *graceful super Fibonacci* adalah sebagai berkut:

Faktor Exacta 12 (1): 51-57, 2019
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X
10.30998/faktorexacta.v12i1.3210



Gambar 5. Pelabelan pada 5 pendulum

Dari uraian di atas, telah dibuktikan bahwa graf pendulum dapat dilabelkan menggunakan pelabelan *graceful super Fibonacci* yang diperjelas dengan contoh. Sebelumnya telah terbit beberapa artikel terkait pelabelan *graceful Fibonacci* dan *graceful super Fibonacci* pada beberapa graf, Uma dan Amuthavalli (2016) menemukan pelabelan *graceful Fibonacci* pada beberapa graf bintang diantanya pada graf sisir untuk $n > 2$, subdivisi dari Bistar $B_{2,n}w_i, 1 \leq i \leq n$, $CT\ (m, n)$ untuk setiap n dan $m \geq 2$ dan graf *jelly fish* $j(m, n)$. Vaidya dan Prajapati (2011) telah membuktikan beberapa teorema untuk pelabelan graf dengan menggunakan pelabelan *graceful Fibonacci* dan *super Fibonacci*, diantaranya graf hasil penghubungan satu sisi pada *vertex* C_{3m} terhadap satu *vertex* C_{3n} adalah *graceful Fibonacci* dan gabungan dari dua *cycle* C_{3m} dan C_{3n} adalah *graceful super Fibonacci*.

PENUTUP

Simpulan

Pada artikel ini diperkenalkan satu jenis graf yaitu graf Fibonacci pendulum dan pelabelan simpulnya menggunakan teknik pelabelan super Fibonacci pendulum untuk C_3, yang disertai dengan algoritma pelabelan untuk k −buah pendulum secara umum.

Saran

Pada artikel ini terdapat *open problem* yaitu bagaimana sifat dan Konstruksi pelabelan pada graf pendulum C_n untuk $n > 3$

DAFTAR PUSTAKA

Chakraborty A. Dkk (2018). *Application of Graph Theory in Social Media.* International Journal of Computer Sciences and Engineering.- Vol. 6 No.10-2018

Gallian, J. A.(2013). *Dynamic Survey of Graph Labeling.* The Electronic Journal of Combinatorics-Vol.3 No. 16-2013

Sridevi, R., Navaneethakrishnan, S & Nagaraan, K. (2010). *Super Fibonacci Graceful Labeling*. Tamil Nadu: International J.Math. Combin-Vol.3 No.3-2010

Sutarno, H. dkk. (2013). *Matematika Diskrit*. Jakarta: JICA.

Uma, R. & Amuthavalli D. (2016). *Fibonacci Graceful Labelling of some Star Related Graphs.* International Journal of Computer Application-Vol. 134 No.15-2016

Vaidya, S.K. & Vihol, P.L.(2011). *Fibonacci and Super Fibonacci Graceful Labeling of some graphs.* Studies in Mathematical Sciences-Vol.2 No.2-2011.

Vaidya, S.K. & Prajapati U.M. (2011). *Fibonacci and Super Fibonacci Graceful Labellings of Some Cycle Related Graps.* International J.Math. Combin-Vol.4 No. 6-2011.

Wallis, W.D. (2007). *A Beginner's Guide to Graph Theory*. Berlin: Birkhauser.