Faktor Exacta 10 (2): 111-117, 2017
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

POLINOMIAL KARAKTERISTIK PADA GRAF KINCIR ANGIN BERARAH

FINATA RASTIC ANDRARI
fina.rastic@gmail.com

Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknik, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indraprasta PGRI

Abstrak. Misalkan G suatu graf berarah dengan $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Matriks adjacency dari graf berarah G adalah matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran n x n yang didefinisikan dengan $a_{ij} = 1$, untuk $i \neq j$ jika terdapat busur berarah dari i ke j dan $a_{ij} = 0$ untuk selainnya. Pada tulisan ini akan dicari bentuk umum polinomial karakteristik dari matriks *adjacency* graf kincir angin berarah Q_k, yaitu modifikasi dari suatu kelas graf *Dutch Windmill* $D_4^{(m)}$yang ditambahkan satu simpul dan busur yang bertetangga dengan titik pusat kincir serta diberi orientasi untuk semua busurnya yaitu menuju ke titik pusat kincir, dengan k adalah banyak kincir dari graf tersebut.

Kata kunci : graf kincir angin berarah, graf Dutch Windmill $D_4^{(m)}$, matriks adjacency, polinomial karakteristik, spectrum

Abstract. Let G be a directed graph with V (G) = {1, 2, ..., n}. The adjacency matrix of a directed graph G is a matrix A = $[a_{ij}]$ size n x n defined by $a_{ij} = 1$, for $i \neq j$ if there is a directed arc from i to j, and $a_{ij} = 0$ for the other kind. In this paper look for common forms characteristic polynomial of the adjacency matrix of directed windmill graph Q_k, which is a modification of Dutch Windmill graph ($D_4^{(m)}$). That is added one node and arc that adjacent with central point windmill and were given an orientation for all bow toward the center point of mill , where k is a lot of wheel of the graph.

Keyword : directed windmill graph, Dutch Windmill $D_4^{(m)}$graph, adjacency matrix, characteristic polynomial, spectrum

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang sangat pesat karena masih banyak sifat-sifat dari suatu graf yang belum diteliti lebih lanjut, salah satunya adalah matriks *adjacency* dari graf berarah. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, 2014).

Berdasarkan orientasi arah pada sisinya, graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf tak-berarah dan graf berarah. Pada graf tak-berarah urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan, jadi $(u,v) = (v, u)$. Pada graf berarah, sisi biasa disebut busur. Busur (u,v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(u,v) \neq (v, u)$. (Munir, 2014)

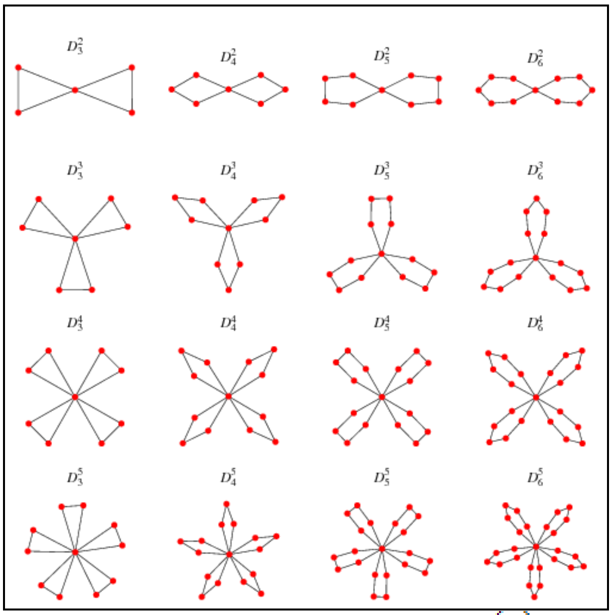
Graf yang tidak mengandung gelang (loop) atau sisi ganda disebut graf sederhana. Salah satu graf sederhana khusus yang dijumpai pada banyak aplikasi adalah graf siklik. Graf siklik adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf

Faktor Exacta 10 (2): 111-117, 2017
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

siklik dengan *n* simpul dilambangkan dengan C_n. Jika simpul-simpul pada C_n adalah v_1, v_2, ..., v_n, maka sisi-sisinya adalah (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), dan (v_n, v_1). Dengan kata lain, ada sisi dari simpul terakhir, v_n, ke simpul pertama, v_1. (Munir, 2014).

Graf Dutch Windmill yang dinotasikan $D_n^{(m)}$ adalah graf yang diperoleh dari mengambil graf siklik C_n dengan sebuah simpul berimpitan (lihat Gambar 1). Graf Dutch Windmill $D_n^{(m)}$ memuat $(n-1)m+1$ simpul dan mn sisi (Kanna, 2016).

Dalam artikel ini akan dibahas suatu kelas graf berarah yaitu graf kincir angin berarah yang dilambangkan dengan Q_k. Graf kincir angin berarah Q_k merupakan modifikasi dari graf *Dutch Windmill* $D_4^{(m)}$ yang ditambahkan satu simpul dan sebuah busur yang bertetangga dengan titik pusat kincir serta diberi orientasi yaitu untuk semua busurnya menuju ke titik pusat kincir. Dari graf tersebut akan dicari bentuk umum dari polinomial karekteristik serta nilai eigen dari matriks *adjacency*-nya. Graf Q_k memiliki simpul sebanyak $3k + 2$ dan busur sebanyak $4k + 1$ untuk $k \geq 1$.



Gambar 1. Graf Dutch Windmill $D_n^{(m)}$
Sumber : http://mathworld.wolfram.com/WindmillGraph.html

METODE

Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur dengan mempelajari makalah dan buku-buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan sifat-sifat polinomial karakteristik matriks *adjacency* dan menentukan spektrum matriks *adjacency* dari graf kincir angin berarah (Q_k).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum diberikan pembahasan lebih lanjut tentang graf Q_k, berikut ini akan diberikan beberapa definisi yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 1.

Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, skalar λ adalah nilai eigen dari matriks A jika terdapat vektor $x_{n \times 1} \neq 0$ yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Vektor x yang memenuhi kesamaan tersebut dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai

Faktor Exacta 10 (2): 111-117, 2017
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

eigen λ. Polinomial karakteristik dari A adalah bentuk polinom dari $\det(\lambda I - A)$. Akar-akar polinomial karakteristik tersebut merupakan nilai eigen dari matriks A. (Meyer, 2000)

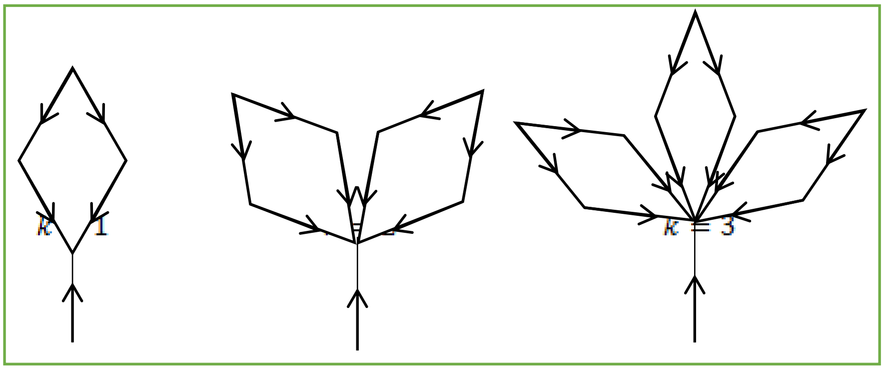
Definisi 2.
Misalkan *G* suatu graf berarah dengan *V*(*G*) = {1, 2, …, n}. Matriks *adjacency* dari graf berarah *G* adalah matriks *A* = [a_{ij}] yang berukuran *n* x *n* yang didefinisikan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \; untuk\; i \neq j\; jika\; terdapat\; busur\; berarah\; dari\; i\; ke\; j \\ 0, \; untuk\; selainnya \end{cases}$$

Definisi 3.
Spektrum dari suatu graf G adalah himpunan nilai eigen dari matriks adjacency A dengan $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{s-1}$, beserta masing-masing multiplisitasnya adalah $m(\lambda_0)$, $m(\lambda_1)$, …, $m(\lambda_{s-1})$, maka spektrum graf G dapat dituliskan

$$Spec(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \ldots & m(\lambda_{s-1}) \end{pmatrix}$$

Graf kincir angin berarah Q_k merupakan modifikasi dari graf $D_4^{(m)}$ yang ditambahkan satu simpul dan busur yang bertetangga dengan titik pusat kincir. Pada graf ini juga diberi orientasi yang semua sisinya berarah menuju ke titik pusat kincir (lihat Gambar 2).



Gambar 2. Graf kincir angin berarah Q_k

Selanjutnya dicari polinomial karakteristik dari graf Q_k, untuk $k = 1,2,3$. Untuk mendapatkan polinomial karakteristik dari suatu graf, terlebih dahulu tentukan *matriks adjacency* dari graf tersebut sesuai Definisi 2.
Matriks adjacency dari graf Q_k

- untuk $k = 1$

Graf Q_k untuk k = 1 memiliki jumlah simpul sebanyak
$n = 3(1) + 2 = 5$
Dan memiliki jumlah sisi sebanyak
$m = 4(1) + 1 = 5$
Matriks adjacency-nya adalah sebagai berikut

$$A(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 1, polinomial karakteristik dari $A(Q_1)$ adalah det $(A(Q_1) - \lambda I)$, sehingga akan diperoleh

$$p(A(Q_1))$$
$$= \det(A(Q_1) - \lambda I)$$
$$= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^5$$

- untuk $k = 2$

Graf Q_k untuk k = 2 memiliki jumlah simpul sebanyak

$$n = 3(2) + 2 = 8$$

Dan memiliki jumlah sisi sebanyak

$$m = 4(2) + 1 = 9$$

Matriks adjacency-nya adalah sebagai berikut

$$A(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh polinomial karakteristik dari *matriks adjacency* $A(Q_2)$ adalah

$$p(A(Q_2))$$
$$= \det(A(Q_2) - \lambda I)$$
$$= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^8$$

- untuk $k = 3$

Graf Q_k untuk k = 2 memiliki jumlah simpul sebanyak

$$n = 3(3) + 2 = 11,$$

dan memiliki jumlah sisi sebanyak

$$m = 4(3) + 1 = 13.$$

Matriks adjacency-nya adalah sebagai berikut

$$A(Q_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks adjacency $A(Q_3)$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(A(Q_3))$$
$$= \det(A(Q_3) - \lambda I)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^{11}$$

Hasil polinomial karakteristik dari graf Q_k untuk $k = 1,2,3$ diringkas dalam Tabel 1. Pada Tabel 1 juga ditampilkan hasil polinomial karakteristik serta nilai eigen dari graf Q_k untuk $k = 1,2, \dots 6$.

Tabel 1. menampilkan bentuk graf kincir angin berarah beserta polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks *adjacency* untuk nilai *k* = 1, 2, …, 6. Berdasarkan tabel tersebut, terlihat bahwa untuk nilai k = 1,2, …, 6 polinomial karakteristiknya adalah λ^n, dimana *n* adalah banyak simpul dari grafnya. Hal tersebut jelas mengakibatkan nilai eigen dari matriks *adjacency*-nya adalah 0. Bentuk ini akan dibuktikan pada Teorema 1 yang menunjukkan bahwa hal tersebut berlaku secara umum.

Tabel 1. Polinomial karakteristik dan nilai eigen dari Graf Q_k untuk $k = 1,2, \dots ,6$

k	Banyak Simpul	Polinomial Karakteristik	Vektor Eigen
1	5	λ^5	$\{0,0,0,0,0\}$
2	8	λ^8	$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}$

Faktor Exacta 10 (2): 111-117, 2017
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

3	11	λ^{11}	$\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$
4	14	λ^{14}	$\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$
5	17	λ^{17}	$\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$
6	20	λ^{20}	$\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$

Teorema 1.

Misalkan Q_k adalah graf kincir angin berarah dengan $k \geq 1$. Misalkan $A(Q_k)$ adalah matriks *adjacency* dari Q_k yang berukuran *n* x *n*. Maka polinomial matriks *adjacency* $A(Q_k)$ adalah

$$p(A(Q_k)) = \lambda^n$$

Bukti

Secara umum, matriks *adjacency* dari graf Q_k dapat dituliskan

$$A(Q_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka bentuk polinomial karakteristik dari matriks $A(Q_k)$, adalah

$$p\big(A(Q_k)\big)$$
$$= \det(A(Q_k) - \lambda I)$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^n$$

Lemma 2.

Misalkan Q_k adalah graf kincir angin berarah dengan $k \geq 1$. Misalkan $A(Q_k)$ adalah matriks adjacency dari Q_k yang berukuran *n* x *n*.Maka spektrum matriks adjacency $A(Q_k)$ adalah

$$Spec\big(A(Q_k)\big) = \binom{0}{n}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan bahwa polinomial karakteristik matriks *adjacency* dari graf kincir angin berarah dengan $k \geq 1$ adalah $p\big(A(Q_k)\big) = \lambda^n$. Maka

$$p\big(A(Q_k)\big) = \lambda^n = 0$$

Sehingga nilai karakteristik dari $A(Q_k)$ adalah 0 dengan multiplisitas n. Jadi spektrum matriks *adjacency* dari graf kincir angin berarah dengan $k \geq 1$ adalah

$$Spec\big(A(Q_k)\big) = \binom{0}{n}$$

□.

PENUTUP

Simpulan

Polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf kincir angin berarah adalah

$$p(A(Q_k)) = \lambda^n,$$

dengan spektrumnya yaitu

$$Spec\big(A(Q_k)\big) = \binom{0}{n}$$

DAFTAR PUSTAKA

Bapat, R. B. (2010)**. Graphs and Matrices**. India : Hindustan Book Agency.

Biggs, N. (1993)**. Algebaric Graph Theory (2nd ed)**. New York : Cambridge Mathematical Library.

Kanna, M. R., Kumar, R. P., dan Jagadessh, R. (2016). **Computation of Topological Indices of Dutch Windmill Graph**. *Open Journal of Discrete Mathematics*. 6 : 74-81.

Meyer, Carl D. (2000). **Matrix Analysis and Applied Linier Algebra**. New Jersey: SIAM.

Munir, R. (2014). **Matematika Diskrit**. Bandung : Informatika Bandung.