Faktor Exacta 10 (2): 154-161, 2017
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

SIFAT NILAI EIGEN MATRIKS *ANTI ADJACENCY* DARI GRAF SIMETRIK

NONI SELVIA
noni.selvia@gmail.com

Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknik,Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indraprasta PGRI

Abstrak. Matriks *antiadjacency* merupakan salah satu cara untuk merepresentasikan suatu graf berarah. Misalkan $\boldsymbol{G}$ adalah sebuah graf berarah dengan $(\boldsymbol{G}) = \{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$. Matriks *adjacency* dari graf berarah $\boldsymbol{G}$ adalah matriks $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, dengan $\boldsymbol{a_{ij}} = 1$ jika terdapat busur berarah dari $\boldsymbol{v_i}$ ke $\boldsymbol{v_j}$ dengan $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ dan lainnya akan bernilai 0. Matriks $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{A}$ disebut sebagai matriks *antiadjacency* dari graf berarah $\boldsymbol{G}$ dengan $\boldsymbol{J}$ adalah matriks berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ yang semua entrinya adalah 1. Pada makalah ini akan dibahas mengenai sifat nilai eigen matriks *antiadjacency* dari graf simetrik.

Kata Kunci: matriks antiadjacency, graf simetrik, sifat nilai eigen

Abstract. Antiadjacency matrix is one of the ways to represent a directed graph. Let G be a directed graph with $\mathbf{V(G)} = \{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$. The adjacency matrix of G is a matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$ of order $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, with $\mathbf{a_{ij}} = \mathbf{1}$ if there is an edge from $\mathbf{v_i}$ to $\mathbf{v_j}$, for $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, otherwise $\mathbf{a_{ij}}$ will equals 0. The matrix $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$ is called the antiadjacency matrix of G, with $\mathbf{J}$ is a matrix of order $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ with all entries equal to 1. In this paper, it will show characteristic of eigenvalue of antiadjacency matrix of symmetric graph

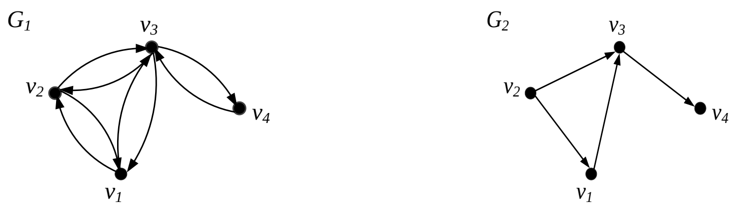
Keywords : *antiadjacency matrix, a symmetric graph, characteristic of eigenvalue*

PENDAHULUAN

Teori graf aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengaplikasikan teori matriks dan aljabar linear untuk menemukan sifat-sifat yang berkaitan dengan kelas-kelas graf. Salah satu aplikasinya yaitu dalam menentukan sifat-sifat dari matriks *antiadjacency* dari suatu graf berarah.

Ada dua tipe graf berarah G yang dapat diamati yaitu graf berarah simetrik dan graf berarah asimetrik atau biasa disebut graf terorientasi. Graf berarah G dikatakan simetrik jika pada graf tersebut terdapat busur berarah uv maka busur vu juga ada. Sedangkan graf terorientasi hanya mempunyai busur berarah uv atau vu saja. (Bapat, R.B, 2010)

Busur berarah yang mempunyai simpul asal dan simpul ujung yang sama disebut gelang (*loop*), serta busur-busur berarah yang mempunyai pasangan terurut dari simpul yang sama disebut busur sejajar (*parallel*). Graf berarah yang tidak mempunyai gelang dan busur yang berarah sejajar disebut graf sederhana (*simple directed graph*). (Chartrand, G dan Lesniak, L, 1996). Graf berarah sederhana yang simetrik selanjutnya disebut graf simetrik. Berikut ini adalah contoh dari graf simetrik dan graf asimetrik



Gambar 1. Graf simetrik $\boldsymbol{G_1}$ dan graf asimetrik $\boldsymbol{G_2}$

Sumber: (Chartrand, G dan Lesniak, L, 1996)

Sebelum diberikan sifat nilai eigen matriks *antiadjacency* dari graf simetrik, berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan Teorema yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 1

Matriks *adjacency* dari graf berarah G adalah matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i \neq j \text{ jika terdapat busur berarah dari } v_i \text{ ke } v_j \\ 0, & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

Matriks *antiadjacency* dari graf berarah G adalah matriks $B = J - A$, dengan J adalah matriks berukuran $n \times n$ yang semua entrinya adalah 1. (Aigner, 1967)

Definisi 2

Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, skalar λ adalah nilai eigen dari matriks A jika terdapat vektor $x_{n\times 1} \neq 0$ yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Vektor x yang memenuhi kesamaan tersebut dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Polinomial karakteristik dari A adalah bentuk polinom dari $\det(\lambda I - A)$. Ternyata, akar-akar polinomial karakteristik tersebut merupakan nilai eigen dari matriks A. (Aliyani, F, 2014)

Definisi 3

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka trace A yang dinotasikan dengan $tr\,(A)$ didefinisikan

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad \text{dengan } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Definisi 4
Suatu submatriks dari suatu matriks adalah susunan matriks yang diperoleh dengan menghapus sembarang kombinasi baris dan kolom matriks dari matriks A. Suatu submatriks utama berukuran $r \times r$ dari matriks $A_{n\times n}$ adalah suatu submatriks yang berada pada himpunan yang sama dari r baris dan kolom. Suatu minor utama berukuran $r \times r$ adalah determinan dari submatriks utama berukuran $r \times r$. Dengan kata lain, suatu minor utama berukuran $r \times r$ diperoleh dengan menghapus himpunan yang sama dari $(n-r)$ baris dan kolom, dimana banyaknya adalah $\binom{n}{r}$ minor utama. (Meyer, 2000)

Definisi
Beberapa sifat nilai mutlak dari bilangan real yaitu,
1. $|x+y| \leq |x| + |y|$.
2. $|x-y| \leq |x| + |y|$.

(Biggs, 1993)

Teorema 1
Jika $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$ *adalah persamaan karakteristik dari matriks* $A_{n\times n}$ *maka*

$$c_i = (-1)^i \sum_{j=1}^{w} \left|A_i^{(j)}\right| \, dengan\, i = 1, 2, \cdots, n$$

dimana $\left|A_i^{(j)}\right|$ *adalah minor utama yang berukuran* $i \times i$ *dari matriks* A *dan* $j = 1, \cdots, w$ *dengan* w *adalah banyaknya minor utama yang berukuran* $i \times i$.

(Meyer, 2000)

Teorema 2
Misalkan polinomial berderajat $n, p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$,

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *adalah akar-akar dari polinomial* $p(x)$, *maka berlaku*

1. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_k x_k = -\frac{a_1}{a_0}$
2. $(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{j\neq k} x_jx_k = \frac{a_2}{a_0}$
3. $(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n) + (x_1x_3x_4 + x_1x_4x_5 + \cdots + x_1x_3x_n) + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{j\neq k\neq l} x_jx_kx_l = -\frac{a_3}{a_0}$

$\vdots$

4. $x_1x_2x_3x_4 \ldots x_n = \prod_{1\leq k\leq n} x_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_o}$.

(Wearden, 2003)

METODE

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah melalui studi kepustakaan dengan mempelajari buku, makalah, dan penelitian sebelumnya yang berkaitan untuk digunakan sebagai dasar teori dalam menentukan sifat nilai eigen dari suatu matriks *antiadjacency* untuk graf simetrik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas hasil penelitian tentang sifat nilai eigen matriks *antiadjacency* dari graf simetrik yang akan diberikan dalam bentuk Lema.

Lema 1

Misalkan G adalah graf simetrik yang mempunyai n simpul dan m busur. Misalkan $B_{n\times n}$ adalah matriks antiadjacency dari G. Jika $p(B)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n=0$ merupakan persamaan karakteristik dari matriks B, maka $b_1=-n$ dan $b_2=\frac{m}{2}$.

Bukti.

Misalkan persamaan karakteristik dari matriks *antiadjacency* graf berarah G adalah
$p(B)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n=0$
Akan ditunjukkan bahwa $b_1=-n$ dan $b_2=\frac{m}{2}$.
Berdasarkan Teorema 1, diketahui

$$b_i=(-1)^i\sum_{j=1}^{w}\left|B_i^{(j)}\right| \quad , \quad dimana\; i=1,2,\cdots,n\ .$$

dimana $\left|B_i^{(j)}\right|$ adalah minor utama yang berukuran $i\times i$ dari matriks B dan $j=1,2,\cdots,w$ dengan w adalah banyaknya minor utama yang berukuran $i\times i$. Berikut ini akan ditunjukkan nilai b_i untuk $i=1$ dan $i=2$.
Untuk $i=1$, maka akan ditunjukkan bahwa $b_1=-n$

$$b_1=(-1)^1\sum_{j=1}^{w}\left|B_1^{(j)}\right|$$

Dimana $\left|B_1^{(j)}\right|$ adalah minor utama yang berukuran 1×1 pada matriks B, maka $\left|B_1^{(j)}\right|$ merupakan determinan dari entri – entri pada diagonal utama pada matriks B yaitu $|b_{ii}|$ dimana $i=j$. Berdasarkan sifat submatriks utama dari matriks berukuran $n\times n$ dan w merupakan banyaknya minor utama yang berukuran 1×1 , maka $w=\binom{n}{1}=n$.
Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
b_1&=(-1)^1\left(\left|B_1^{(1)}\right|+\left|B_1^{(2)}\right|+\cdots+\left|B_1^{(w)}\right|\right).\\
&=(-1)(|b_{11}|+|b_{22}|+\cdots+b_{ww}).\\
&=(-1)\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{w}\right).\\
&=-w.\\
&=-n.
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $b_1=-n$.

Untuk $i = 2$, maka akan ditunjukkan $b_2 = \frac{m}{2}$.

$$b_2 = (-1)^2 \sum_{j=1}^{w} \left|B_2^{(j)}\right|$$

Dimana $\left|B_2^{(j)}\right|$ adalah minor utama yang berukuran 2×2 pada matriks B. Berdasarkan sifat submatriks utama dari matriks berukuran $n \times n$ dan w merupakan banyaknya minor utama yang berukuran 2×2 , maka $w = \binom{n}{2}$. Karena pada minor utama berukuran 2×2, mempunyai dua kemungkinan nilai yaitu 0 dan 1, maka

$$\sum_{j=1}^{w} \left|B_2^{(j)}\right| = \binom{n}{2} - \omega$$

Dimana ω adalah banyaknya minor utama berukuran 2×2 yang bernilai 0. Dengan kata lain ω menyatakan banyaknya dua simpul yang tidak mempunyai busur simetrik. Ternyata untuk suatu graf simetrik hasil dari $\binom{n}{2} - \omega$ sama dengan setengah dari banyaknya busur simetrik yaitu $\frac{m}{2}$. Hal ini dikarenakan oleh, suatu graf simetrik mempunyai m busur dan untuk 1 minor utama berukuran 2×2 yang bernilai 1 menyatakan hubungan sepasang busur berarah simetrik, maka banyaknya minor utama berukuran 2×2 yang bernilai 1 akan sama dengan setengah dari banyaknya busur yang ada pada graf simetrik. Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} b_2 &= (-1)^2 \sum_{j=1}^{w} \left|B_2^{(j)}\right|. \\ &= 1\left(\binom{n}{2} - \omega\right). \\ &= \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $b_2 = \frac{m}{2}$.■

Lema 2

Misalkan G adalah graf simetrik yang mempunyai n simpul dan m busur dan B adalah matriks antiadjacency dari graf G. Jika $p(B) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$ adalah persamaan karakteristik dari B dan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah akar – akar persamaan karakteristik matriks B, maka berlaku

1. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr\,(B) = n$
2. $\sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j = \frac{m}{2}$

Bukti.

Persamaan karakteristik matriks *antiadjacency* dari graf G simetrik adalah
$p(B) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$

1. Akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr\,B = n.$$

Berdasarkan Teorema 2 dan lema 1 bagian 1 diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{b_1}{b_0} = -\frac{b_1}{1} = -b_1 = -(-n) = n$$

Jadi

$$\sum_{1<i<n} \lambda_i = n\,.$$

Berdasarkan definisi 3 diketahui bahwa

$$tr\,(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

Karena pada matriks B merupakan matriks *antiadjacency*, maka entri – entri pada diagonal utama bernilai 1, sehingga diperoleh

$$tr\,(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}$$

$$tr\,(B) = n$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr\,(B) = n.$$

2. Akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\,\lambda_j = \frac{m}{2}.$$

Berdasarkan Teorema 2 dan Lema 1 bagian 2 diperoleh

$$\sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\,\lambda_j = \frac{b_2}{b_0} = \frac{b_2}{1} = b_2 = \frac{m}{2}.$$

Jadi,

$$\sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\,\lambda_j = \frac{m}{2}. \blacksquare$$

Lema 3

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah akar – akar polinomial karakteristik matriks antiadjacency dari graf simetrik yang mempunyai n simpul dan m busur maka, berlaku

1. $\sum_{i=2}^{n} |\lambda_i| \ge |\lambda_1| - n,$
2. $\sum_{i=2}^{n} {\lambda_i}^2 = n^2 - m - {\lambda_1}^2.$

Bukti.

1. Akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{i=2}^{n} |\lambda_i| \geq |\lambda_1| - n.$$

Berdasarkan Lema 2 bagian 1 diketahui

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n.$$

Dapat dikembangkan menjadi

$$\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i = n.$$

$$\lambda_1 = n - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i .$$

Dengan menggunakan sifat tanda mutlak, maka diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| n - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \right| \leq n + \sum_{i=2}^{n} |\lambda_i|.$$

$$|\lambda_1| \leq n + \sum_{i=2}^{n} |\lambda_i|.$$

Jadi,

$$\sum_{i=2}^{n} |\lambda_i| \geq |\lambda_1| - n.$$

2. Akan ditunjukan bahwa

$$\sum_{i=2}^{n} {\lambda_i}^2 = n^2 - m - {\lambda_1}^2.$$

Perhatikan Lema 2 bagian 1, dapat dikembangkan menjadi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = n^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = n^2.$$

Dengan menggunakan hasil Lema 2 bagian 2 diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 + 2\left(\frac{m}{2}\right) = n^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 + m = n^2.$$

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 = n^2 - m.$$

Bentuk ini juga dapat dikembangkan menjadi

$$\lambda_1{}^2 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i{}^2 = n^2 - m.$$

Sehingga diperoleh,

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i{}^2 = n^2 - m - \lambda_1{}^2. \blacksquare$$

PENUTUP

Simpulan

Salah satu cara untuk merepresentasikan graf simetrik adalah menggunakan matriks antiadjacency. Pada makalah ini, diperoleh beberapa sifat nilai eigen dari graf simetrik yaitu, terlihat pada lema 1, lema 2, dan lema 3. Pada lema 1 diketahui bahwa Jika $p(B) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$ merupakan persamaan karakteristik dari matriks B, maka $b_1 = -n$ dan $b_2 = \frac{m}{2}$. Sejalan dengan lema 1, maka diperoleh sifat pada lema 2, Jika $p(B) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$ adalah persamaan karakteristik dari B dan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah akar – akar persamaan karakteristik matriks B, maka berlaku$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr\,(B) = n$ dan $\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j = \frac{m}{2}$. Sedangkan pada lema 3 diperoleh sifat *Jika $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah akar – akar polinomial karakteristik matriks antiadjacency dari graf simetrik yang mempunyai n simpul dan m busur maka, berlaku*$\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i| \ge |\lambda_1| - n$ *dan* $\sum_{i=2}^{n}\lambda_i{}^2 = n^2 - m - \lambda_1{}^2$.

Saran

Pada penelitian ini, telah dilakukan pembuktian mengenai batas atas terkecil nilai eigen matriks *antiadjacency* dari graf simetrik, serta diberikan contoh penggunaannya pada beberapa kelas graf simetrik. Tetapi masih tidak menutup kemungkinan untuk melakukan penelitian lebih lanjut untuk menemukan batas atas nilai eigen matriks *antiadjacency* untuk graf siklik dan asiklik secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

Aigner, M. (1967). **On The Linegraph of a Directed Graph**. *Mathematische Zeitschrift* 102, 56-61.

Aliyani, F. (2014)**. Spektrum Matriks Antiadjacency dari Beberapa Kelas Graf Tak Berarah**.Tesis. Depok: Universitas Indonesia.

Bapat, R.B. (2010). **Graph and Matrices**. India: Hindustani Book Agency.

Biggs, N. (1993). **Algebraic Graph Theory (2nd ed**). New York: Cambridge Mathematical Library.

Chartrand, G dan Lesniak, L. (1996). **Graph & Digraph (3th ed).** Florida: Chapman & Hall/CRC.

Meyer, Carl D. (2000). **Matrix Analysis and Applied Linier Algebra**. New Jersey: SIAM.

Waerden, B.L.v.d. (2000). **Algebra Volume I.** New York: Springer-Verlag.