

## MENUJU MEKANIKA KUANTUM MODULAR

**DIDIK NUR HUDA**

Program Studi Teknik Arsitektur  
Fakultas Teknik, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indraprasta PGRI  
Jl. Nangka No. 58 C, Tanjung Barat, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12530  
Email: didiks.physics@gmail.com

**Abstrak.** Telaah mekanika kuantum selama ini dibangun di atas ruang Hilbert, yakni ruang vektor kompleks dengan produk skalar  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  dengan  $V$  ruang vektor atas bilangan kompleks  $\mathbb{C}$ . Modul Hilbert merupakan perumuman dari ruang Hilbert, dengan mengganti himpunan skalar menjadi gelanggang  $R$  dengan syarat tertentu sehingga merupakan modul Hilbert. Gelanggang yang dimaksud adalah gelanggang bilangan. Modul Hilbert inilah yang akan digunakan untuk membangun fondasi mekanika kuantum modular ini. Penggantian ruang Hilbert dengan modul Hilbert berpengaruh terhadap postulat mekanika kuantum.

**Kata Kunci:** Skalar, Gelanggang, Modul Hilbert, Mekanika Kuantum

**Abstract.** The study of quantum mechanics has been built on a Hilbert space, the complex vector space with inner product  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  with  $V$  is a complex vector space dan  $\mathbb{C}$  is complex numbers. Hilbert module is a generalization of Hilbert space, by changing the scalar set become ring  $R$  with certain conditions so that a Hilbert module. This ring is called the number ring. Hilbert modules that will be used to build the modular foundations of quantum mechanics. Hilbert's space replacement with Hilbert module influences the postulates of quantum mechanics.

**Key words:** Scalar, Rings, Hilbert Module, Quantum Mechanics

### PENDAHULUAN

Mekanika kuantum yang secara luas dikenal saat ini dibangun di atas dasar ruang Hilbert sebagai ruang keadaan. Ruang Hilbert merupakan ruang vektor kompleks karena skalar yang dipilih adalah bilangan-bilangan kompleks. Ruang vektor merupakan objek matematika yang dibangun di atas skalar-skalarnya yang disebut lapangan (*field*). Perluasan konsep ruang vektor adalah modul, yakni dengan mengganti lapangan dengan konsep yang lebih umum yakni gelanggang. Mekanika kuantum juga telah dirumuskan dengan menggunakan kuaternion sebagai gelanggang bagi modul Hilbert dilakukan De Leo (2000). Sebelumnya De Leo pada tahun 1998 juga berupaya membangun mekanika kuantum di atas oktonion.

Dalam mekanika kuantum kuaternion gelanggang yang digunakan adalah bilangan kuaternion, sedangkan mekanika kuantum biasa gelanggang yang digunakan adalah bilangan kompleks. Dalam mekanika kuantum oktonion, oktonion bukanlah gelanggang karena sifat tak asosiatifnya. Bilangan-bilangan tersebut digunakan untuk melabeli ruang vektor sebagai keadaan kuantum. Di sini akan disusun sebuah gelanggang baru yang diberi nama gelanggang bilangan.

## METODE

Penelitian ini adalah penelitian studi literatur sehingga metode yang digunakan adalah analisa modul Hilbert yang didefinisikan dibandingkan dengan ruang Hilbert yang digunakan sebagai fondasi mekanika kuantum.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Gelanggang Bilangan

Gelanggang bilangan  $\mathbb{R}$  ini merupakan perumuman dari  $\mathbb{R}$  (riil),  $\mathbb{C}$  (kompleks), dan  $\mathbb{H}$  (kuaternion). Gelanggang  $\mathbb{R}$  adalah suatu gelanggang yang padanya terdapat involusi, bernorma, dan unital. Involusi adalah pemetaan  $*$ :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sedemikian rupa sehingga sifat berikut terpenuhi:

1.  $(a^*)^* = a$
2.  $(ab)^* = b^* a^*$  dan
3.  $(a+b)^* = a^* + b^*$ ,

untuk semua  $a, b \in \mathbb{R}$ . Unsur  $a \in \mathbb{R}$  dikatakan riil jika  $a = a^*$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{R}$ . Unsur  $a$  anggota gelanggang  $\mathbb{R}$  dikatakan positif jika terdapat unsur  $b$  yang juga anggota  $\mathbb{R}^+$  sedemikian rupa sehingga berlaku  $a = b^* b$ . Norma yang dimaksud adalah

$$\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

yang memiliki sifat  $a^* a = a a^* = \|a\|^2$ , untuk setiap  $a \in \mathbb{R}$ . Selain itu norma ini mempunyai sifat  $\|ab\| = \|a\| \|b\|$ , untuk setiap  $a, b \in \mathbb{R}$ . Gelanggang unital adalah gelanggang yang memiliki elemen  $1 \in \mathbb{R}$ . Unsur  $c \in \mathbb{R}$  dikatakan lebih besar atau sama dengan unsur  $a \in \mathbb{R}$ , ditulis  $a \leq c$ , jika  $c - a$  positif. Dengan demikian interval  $[0, 1]$  dapat didefinisikan menurut  $[0, 1] = \{a \in \mathbb{R}^+ \mid a \leq 1\}$ . Selanjutnya gelanggang bilangan inilah yang akan digunakan dalam mekanika kuantum modular ini.

### Mekanika Kuantum Modular

Mekanika kuantum modular dibangun di dalam modul Hilbert di atas gelanggang bilangan  $\mathbb{R}$  bahwa mekanika kuantum biasa dan kuaternion tercakup di dalamnya. Berikut akan disajikan aksioma-aksioma yang menggambarkan mekanika kuantum tersebut:

**Postulat 1:** *Suatu sistem kuantum berpadanan dengan sebuah modul Hilbert  $M$  bebas kanan di atas gelanggang bilangan  $\mathbb{R}$ . Setiap keadaan sistem kuantum tersebut diwakili oleh sekumpulan anggota-anggota modul  $M$ .*

Setiap anggota modul  $M$  mewakili secara tunggal sebuah keadaan. Dalam mekanika kuantum biasa, vektor  $|\psi\rangle$  dan vektor  $|\psi'\rangle$  yang dapat dituliskan sebagai perkalian antara  $|\psi\rangle$  dengan skalar  $\alpha$ , yakni  $|\psi'\rangle = |\psi\rangle \alpha = \alpha |\psi\rangle$  mewakili keadaan yang sama. Dalam hal ini, vektor  $|\psi\rangle$  dan  $|\psi'\rangle$  dapat dikatakan berada dalam satu kelas ekuivalen sebagaimana pengertian relasi ekuivalen yakni refleksif, simetris, dan transitif. Dua buah vektor dari kelas yang sama oleh karena itu mewakili keadaan yang sama. Dalam mekanika kuantum modular kenyataan semacam itu tidak harus berlaku.

Kesulitan terkait dengan sifat gelanggang yang dipakai:

1. Relasi seperti yang didefinisikan dalam mekanika kuantum biasa bahwa  $|\psi\rangle$  dan  $\alpha|\psi\rangle$  mewakili keadaan yang sama tidak berlaku sebagai relasi ekivalen dalam mekanika kuantum modular, karena melanggar sifat simetris dalam relasi ekivalen meskipun sifat refleksif dan transitif berlaku.

Bukti: Jika  $|\psi'\rangle = |\psi\rangle\alpha$  maka tidak harus ada  $\alpha'$  sedemikian rupa sehingga berlaku  $|\psi\rangle = |\psi'\rangle\alpha'$ , sebab belum tentu  $\alpha'$  invertibel.

Jalan keluar dari masalah ini adalah mendefinisikan ekivalensi dua buah vektor dalam modul  $M$  dengan cara yang sedikit berbeda: vektor  $|\psi\rangle$  dikatakan ekivalen dengan  $|\psi'\rangle$  jika ditemukan sebuah skalar  $\alpha \in R$  yang invertibel sedemikian rupa sehingga  $|\psi'\rangle = |\psi\rangle\alpha$ . Dapat dibuktikan relasi ekivalen semacam ini *well defined*. Perlu diingat bahwa dua buah vektor yang ekivalen tidak sejajar satu dengan yang lain.

2. Jika relasi ekivalen didefinisikan seperti di atas maka tidak setiap kelas ekivalen memuat vektor satuan. Oleh karena itu tidak setiap kelas ekivalen mewakili keadaan. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Andaikan  $R^m$  subhimpunan  $R$  yang memuat anggota-anggota yang invertibel. Untuk vektor  $|\psi\rangle$  dengan  $P\psi P \in R^m$ , terlihat dengan jelas bahwa vektor  $|\hat{\psi}\rangle$  yang didefinisikan oleh  $|\hat{\psi}\rangle = |\psi\rangle P\psi P^{-1}$  merupakan vektor yang panjangnya satu satuan. Jadi, vektor  $|\psi\rangle$  dengan  $P\psi P \in R^m$  ekivalen dengan vektor satuan. Sebaliknya jika, vektor  $|\psi\rangle$  sedemikian rupa sehingga  $P\psi P$  bukan anggota  $R^m$  maka vektor  $|\psi\rangle$  tidak ekivalen dengan vektor satuan. Pembuktiannya sebagai berikut:

Jika  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle$  maka terdapat  $\beta \in R^m$  sedemikian rupa sehingga  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$ . Selanjutnya jika  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$  maka  $P\hat{\psi}P = P\psi\beta^{-1}P$ , sehingga  $P\psi P = \beta$ .

Andaikan kelas vektor-vektor yang memuat vektor satuan disebut kelas bersatuan, sedangkan kelas vektor-vektor yang tidak memuat vektor bersatuan disebut kelas tak bersatuan. Kelas bersatuan kemungkinan terkait dengan keadaan murni, sedangkan yang tak bersatuan kemungkinan terkait dengan keadaan tak murni (campuran). Andaikan  $|\psi\rangle$  dan  $|\varphi\rangle$  berada di dua kelas bersatuan yang berbeda. Vektor  $|\psi\rangle\alpha + |\varphi\rangle\beta$  tidak harus memiliki norma yang invertibel. Oleh karena itu  $|\psi\rangle\alpha + |\varphi\rangle\beta$  tidak harus menjadi anggota kelas bersatuan.

**Postulat 2:** Besaran-besaran fisis diwakili oleh operator-operator yang *selfadjoint* dan kompak yang bekerja pada modul  $M$ .

Pengukuran dalam mekanika kuantum adalah pengundian, maka hasil ukur merupakan anggota suatu ruang sampel. Jadi, setiap besaran fisis memiliki sebuah ruang sampel. Karena besaran-besaran fisis diwakili oleh operator-operator yang *selfadjoint* maka ruang sampel bagi sebuah observabel diperoleh dari operator yang mewakili observabel itu. Ruang sampel ini merupakan spektrum operator tersebut yakni himpunan yang beranggotakan swanilai operator yang bersangkutan.

Selanjutnya ditinjau sebuah operator  $\Omega$  yang *selfadjoint* dan mewakili besaran fisis  $O$ . Ruang sampel bagi  $O$  tidak lain adalah himpunan  $\Sigma(\Omega)$  yang beranggotakan semua skalar  $\omega$  yang memenuhi persamaan swanilai berikut

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = |\psi\rangle\omega \tag{2}$$

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa swanilai operator *selfadjoint* tidak harus riil. Berikut pembuktiannya:

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = |\psi\rangle\omega \quad (3)$$

$$\langle\psi|\hat{\Omega}\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle\omega \quad (4)$$

$$\langle\psi|\hat{\Omega}\psi\rangle - \langle\psi|\psi\rangle\omega = 0 \quad (5)$$

$$\langle\hat{\Omega}^*\psi| = \omega^*\langle\psi| \quad (6)$$

$$\langle\hat{\Omega}^*\psi|\psi\rangle = \omega^*\langle\psi|\psi\rangle \quad (7)$$

$$\langle\hat{\Omega}^*\psi|\psi\rangle - \omega^*\langle\psi|\psi\rangle = 0 \quad (8)$$

Karena sifat *selfadjont*  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^*$  maka dari persamaan (5) dan (8) jika dikurangkan menjadi

$$\langle\psi|\psi\rangle\omega - \omega^*\langle\psi|\psi\rangle = 0 \quad (9)$$

Persamaan (9) dapat dituliskan

$$\omega = P\psi P^2 \omega^* P\psi P^2 \quad (10)$$

Jika  $|\psi\rangle$  vektor satuan atau dapat dikatakan  $P\psi P = 1$  maka persamaan (10) menjadi

$$\omega = \omega^* \quad (11)$$

yang berarti swanilai tersebut riil.

Selanjutnya jika dalam persamaan (2),  $|\psi\rangle$  dituliskan  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle P\psi P$  dan disubstitusikan ke persamaan (9).

$$\langle\hat{\psi} P\psi P|\hat{\psi} P\psi P\rangle\omega - \omega^*\langle\hat{\psi} P\psi P|\hat{\psi} P\psi P\rangle = 0 \quad (12)$$

$$P\psi P\langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle P\psi P\omega - \omega^* P\psi P\langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle P\psi P = 0 \quad (13)$$

$$P\psi P^2 \omega - \omega^* P\psi P^2 = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) sama saja dengan persamaan (10).

Pada persamaan swanilai (2),  $\omega$  disebut swanilai operator  $\Omega$  milik swavektor  $|\psi\rangle$ . Jika  $|\psi\rangle$  adalah swavektor milik  $\omega$  maka  $|\psi\rangle\beta$  pada umumnya bukanlah swavektor milik  $\omega$ . Berikut ini pembuktiannya:

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = |\psi\rangle\omega \quad (15)$$

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle\beta = |\psi\rangle\omega\beta \quad (16)$$

Jika  $\beta$  invertibel, maka persamaan (16) dapat ditulis menjadi

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle\beta = |\psi\rangle\beta\beta^{-1}\omega\beta \quad (17)$$

Jika  $\omega\beta = \beta\omega$  pada persamaan (16) maka swavektor  $|\psi\rangle\beta$  memiliki swanilai  $\omega$ . Dalam persamaan (17) terlihat jelas bahwa  $|\psi\rangle\beta$  memiliki swanilai  $\beta^{-1}\omega\beta$  dan  $|\psi\rangle\beta$  sekelas dengan  $|\psi\rangle$ . Sebelumnya telah disepakati bahwa  $|\psi\rangle$  dan  $|\psi\rangle\beta$  dalam satu kelas ekuivalen tetapi dengan swanilai yang berbeda. Dapat dibuktikan bahwa relasi

$$\omega : \beta^{-1}\omega\beta \quad (18)$$

dengan  $\beta$  invertibel merupakan relasi ekuivalen. Misalkan  $\Sigma(\Omega) = \Sigma(\Omega)/:$  himpunan yang berangotakan semua kelas ekuivalen berhubung relasi ekuivalen di atas.

**Postulat 3:** Ruang sampel bagi pengukuran besaran fisis  $O$  merupakan himpunan  $\Sigma(O)$  yang berangotakan semua kelas ekuivalen swanilai-swnilai

Ensemble adalah kumpulan suatu sistem yang dipersiapkan berada pada suatu keadaan dan persiapan ini selalu dapat diulang setiap kali selesai pengukuran suatu besaran fisis. Situasi ini dapat diganti dengan beberapa sistem fisis identik yang dipersiapkan berada pada keadaan yang sama. Sistem-sistem inilah yang merupakan sistem kuantum (ensembel kuantum).

Ensembel kuantum berisi keadaan-keadaan kuantum. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa keadaan-keadaan kuantum dalam satu kelas ekivalen. Misalnya sistem kuantum dipersiapkan pada keadaan kuantum yang diwakili oleh  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$  yang merupakan swavektor milik operator *selfadjoint*  $\hat{\Omega}$  yang memiliki swanilai  $\omega$ . Hasil pengukuran besaran  $O$  pada keadaan  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$  merupakan swanilai-swanilai dari operator  $\hat{\Omega}$  yakni  $\omega$  dan  $\beta^{-1}\omega\beta$ . Hal ini menunjukkan bahwa hasil pengukuran besaran fisis  $O$  bukan merupakan salah satu swanilai, melainkan merupakan kelas ekivalen.

Andaikan keadaan kuantum diwakili oleh swavektor  $|\psi\rangle\omega$  terkait operator  $\hat{\Omega}$  maka berlaku  $\hat{\Omega}(|\psi\rangle\omega) = (|\psi\rangle\omega)\omega$ . Secara umum, ini menunjukkan bahwa  $|\psi\rangle\omega$  merupakan keadaan lain, kecuali jika  $\omega$  invertibel maka  $|\psi\rangle\omega$  dapat mewakili keadaan yang sama.

**Postulat 4:** Misalkan besaran fisis  $O$  diwakili oleh operator  $\hat{\Omega}$  dengan swanilai  $\omega$  dan swavektor  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$ . Besaran fisis  $O$  diukur pada keadaan yang telah dipersiapkan yang diwakili oleh  $|\varphi\rangle$ . Peluang untuk mendapatkan hasil ukur  $\omega$  jika sistem berada pada keadaan  $|\varphi\rangle$  adalah

$$P(|\varphi\rangle, \omega) = P\langle\hat{\psi}|\varphi\rangle^2 \in [0,1], \quad (19)$$

dengan  $[0,1]$  adalah subhimpunan di  $\mathbb{R}$  yang beranggotakan unsur  $a \in \mathbb{R}$  yang lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan 1.

#### Kemungkinan Perumusan Dinamika Kuantum Modular

Perumusan dinamika kuantum modular ini terkendala pada peubah  $t$  untuk waktu. Peubah  $t$  pada mekanika kuantum biasa merupakan bilangan riil anggota  $\mathbb{R}$  dengan watak yang telah biasa dipahami. Untuk memperumum konsep waktu diandaikan peubah waktu merupakan anggota suatu gelanggang waktu  $\mathbb{R}_t$  yang disebut gelanggang waktu. Gelanggang waktu ini merupakan gelanggang bernorma dan terurut secara linear (*totally ordered*).

Gagasan pendefinisian turunan untuk fungsi yang didefinisikan pada gelanggang waktu melalui perumuman konsep turunan fungsi  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di  $u_0 \in U$  yang merupakan *slope* grafik  $f$  di titik  $u_0$ . Perumuman turunan tersebut diperoleh melalui konsep generator linear sebagai  $Df(u_0) = f'(u_0)$  yakni pemetaan linear yang bekerja pada vektor  $(u - u_0)$ . Dengan kata lain

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \text{ a } g(u) = f(u_0) + Df(u_0) \cdot (u - u_0)$$

menyinggung  $f$  dititik  $u_0$ .

Berikut ini definisi untuk perumuman tersebut melalui turunan Fréchet:

**Definisi 1**

Andaikan  $E, F$  dua modul bertopologi dan  $U$  terbuka di  $E$  serta dengan pemetaan  $f, g : U \subset E \rightarrow F$

$f$  dan  $g$  dikatakan tangent di  $u_0 \in U$  jika dan hanya jika

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{Pf(u) - g(u)P}{Pu - u_0P} = 0$$

dengan  $P \cdot P$  norma pada modul tersebut.

**Teorema:**

Untuk  $f : U \subset E \rightarrow F$  dan  $u_0 \in E$  dan terdapat paling tidak satu  $L \in L(E, F)$  sedemikian rupa sehingga pemetaan  $g_L : U \subset E \rightarrow F$  yang diberikan oleh  $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$  merupakan tangent  $f$  di  $u_0$ .

**Definisi 2** Jika terdapat sebuah  $L \in L(E, F)$ ,  $f$  dapat dikatakan dapat diturunkan (*differentiable*) di  $u_0$  dan definisi turunan  $f$  di  $u_0$  sebagai  $Df(u_0) = L$ . Jika  $f$  dapat diturunkan untuk setiap titik  $u_0 \in U$ , pemetaan

$$Df : u \rightarrow L(E, F)$$

$u \text{ a } Df(u)$

merupakan turunan  $f$ . Jika  $Df$  pemetaan kontinyu dapat dikatakan  $f$  merupakan kelas  $C^1$  dapat diturunkan secara kontinyu (*continously differentiable*).

Berdasarkan Definisi 2  $E = \mathbb{R}_t$  dan  $F = M$ . Dalam kasus ini dimensi  $\mathbb{R}_t$  dan  $M$  tidak harus sama. Dimensi  $\mathbb{R}_t$  adalah satu, sedangkan dimensi  $M$  dapat berhingga atau tak berhingga.

Andaikan terdapat  $L \in L(\mathbb{R}_t, M)$  turunan di  $t$  dan terdapat pemetaan  $f : \mathbb{R}_t \subset \mathbb{R}_t \rightarrow M$ . Turunan di  $t$  didefinisikan sebagai  $Df(t) = A$ .

Selanjutnya untuk menuju persamaan Schrödinger didefinisikan operator yang uniter. Dalam mekanika kuantum biasa operator translasi waktu  $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t - t_0)$  merupakan operator yang uniter.

Andaikan pada saat  $t_0$  keadaan kuantum diwakili oleh  $|\psi(t_0)\rangle$ . Andaikan keadaan pada saat  $t$  mengalami perubahan yang diwakili  $|\psi(t)\rangle$  maka hubungannya

$$\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle, \tag{20}$$

dengan  $\hat{U}(t, t_0)$  adalah operator uniter. Dalam mekanika kuantum biasa dinamika sistem kuantum dapat diperoleh melalui operator uniter. Kemungkinan besar dari operator uniter inilah dinamika sistem kuantum modular dapat diturunkan. Dalam penelitian ini dinamika mekanika kuantum modular belum dapat diselesaikan karena membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam.

**PENUTUP**

**Simpulan**

1. Ruang keadaan kuantum dinyatakan dalam modul Hilbert kanan  $M$  di atas gelanggang  $R$  yang disertai dengan fitur-fitur yang mungkin untuk membangun mekanika kuantum modular ini: involusi, bernorma, dan unital, serta invertibel.

2. Besaran-besaran fisis diwakili oleh operator-operator yang **selfadjoint** dan kompak yang bekerja pada modul  $M$ .
3. Ruang sampel bagi pengukuran besaran fisis  $O$  merupakan himpunan  $\Sigma(\Omega)$  yang beranggotakan semua kelas ekivalen swanilai-swnilai.
4. Besaran fisis  $O$  diwakili oleh operator  $\hat{\Omega}$  dengan swanilai  $\omega$  dan swavektor  $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$ . Besaran fisis  $O$  diukur pada keadaan yang telah dipersiapkan yang diwakili oleh  $|\varphi\rangle$ . Peluang untuk mendapatkan hasil ukur  $\omega$  jika sistem berada pada keadaan  $|\varphi\rangle$  adalah

$$P(|\psi\rangle, \omega) = P\langle\hat{\psi}|\varphi\rangle P^2 \in [0,1], \quad (21)$$

dengan  $[0,1]$  adalah subhimpunan di  $\mathbb{R}$  yang beranggotakan unsur  $a \in \mathbb{R}$  yang lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan 1.

### Saran

Dinamika kuantum modular dimulai dengan mendefinisikan gelanggang waktu  $\mathbb{R}_t$  dan turunannya. Dalam penelitian ini belum dapat diselesaikan karena membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam. Selanjutnya mendefinisikan gelanggang waktu tersebut dan memberikan definisi turunan padanya.

### DAFTAR PUSTAKA

- Abraham, R. dan Marsden, J. E.1987. **Foundation of Mechanics**. Addison-Wesley Publishing CompanyInc. United States of America.
- Arbab. 2011. **The Quaternionic Quantum Mechanics** – Volume3, No. 2. November 2011, halaman 160-170.
- Baez, J. C., 2001. **The Octonions**. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY – Volume 39, No. 2. 21 Desember. halaman 145-205.
- Baker Andrew. 1999. **Right Eigenvalues for Quaternionic Matrice: A Topological Approach. Linear Algebra and Its Applications** – 286. Halaman 303-309
- De Leo, S. dan Rotelli, P. 1994. **Translation between Quaternion and Complex Quantum Mechanics**. Progress of Theoretical Physics – Volume 92, No. 5. halaman 917-926
- De Leo, S dan Abdel-Khalek K. 1998. **Toward an Octonionic World**. International Journal of Theoretical Physics – Volume 37, No. 7, Halaman 1945-1985.
- De Leo, S. dan Sclarici, G. 2000. **Right Eigenvalue Equation in Quaternionic Quantum Mechanics**. J.Phys. A: Math – Gen 33. halaman 2971-2995.
- De Leo, S dan Ducati, G. 2001. **Quaternionic Differential Operators**. Journal of Mathematical Physics – 42, halaman 2236-2265.
- De Leo, S., Sclarici G., dan Solombrino L. 2002.**Quaternionic Eigenvalue Problem**. Journal of Mathematical Physics – 43. halaman 5815-5829.
- Girard, P. R. 2006. **Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics**. Birkhäuser. Basel-Boston-Berlin.
- Horn, Martin E. 2002. **Quaternion in University-Level Physics Considering Special Relativity**. German Physical Society. Leipzig.
- Landsman, N.P. 1998. **Lecture Notes on  $C^*$ -Algebras, Hilbert  $C^*$ -modules, and Quantum Mechanics**. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics University of Amsterdam. Plantage Muidergracht 24.
- Lang, S. 1995. **Differential and Riemannian Manifolds**. Springer-Verlag. New York.

- MacLane S. dan Birkhoff G. 1979. **Algebra Second Edition**. Macmillan Publishing Co. Inc. United States of America.
- Manuilov V. M. dan Troitsky E. V. 2005. **Translation of Mathematical Monographs Hilbert  $C^*$ -Modules**. American Mathematical Society.
- Rastall, Peter. 1964. **Quaternions in Relativity**. Rev. Mod. Phys – Volume 36, halaman 820-832
- Rosyid, M. F. 2006. **Mekanika Kuantum Model Matematis Gejala Alam Mikroskopis-Tinjauan Takrelativistik**. Jurusan Fisika FMIPA UGM Yogyakarta.
- Sabata, H. 1997. **The Octonion Algebra in Quantum Mechanics**. Memoirs of Osaka Kyoiku University – Volume 45, No. 2 halaman 223-230.
- Skeide, Michael. 1997. **Hilbert Modules in Quantum Electri Dynamics and Quantum Probability**. Communications in Mathematical Physics – 192, halaman 569-604
- Tannoudji, C., Diu, B. and Laloë, F. 1977. **Quantum Mechanics Volume I**. John Wiley and Sons Inc. New York.