Faktor Exacta 9(4): 293-301, 2016
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

PERHITUNGAN MASSA KLASIK SOLITON

ALHIDAYATUDDINIYAH T.W.
alhida.dini@gmail.com

Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Teknik, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indraprasta PGRI

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan solusi massa klasik soliton dengan menggunakan persamaan Sine-Gordon. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur dengan melakukan perhitungan massa klasik melalui tahap perhitungan rapat Lagrangian serta rapat Hamiltonian. Massa klasik yang dihasilkan berbeda bergantung pada tiap-tiap nilai D dari uji coba Lagrangian yang diberikan. Ada yang konvergen dengan kondisi massa lebih besar dari nol dan ada pula yang divergen. Solusi satu soliton persamaan Sine-Gordon menunjukkan bahwa soliton berkelakuan sebagai partikel yang relativistik. Fenomena gelombang seperti inilah yang berperan penting dalam hubungannya dengan sifat partikel melalui persamaan gelombang nonlinear.
Kata kunci: persamaan Sine-Gordon, solusi soliton, massa klasik.

Abstract. This study aims is to describes the mass of the classical soliton solutions by using Sine-Gordon equation. the method used in this research is literature study by performing calculations through the stages of the calculation of the classical mass density of the Lagrangian and Hamiltonian. This resulting classical mass differ depending on each trial value of D from a given Lagrangian. There are convergent with the condition of mass greater than zero and some are divergent. Soliton solutions of the Sine-Gordon equation shows that the soliton behaves as a relativistic particle. Wave phenomena such as these play an important role in relation to the nature of the particles through nonlinear wave equations.
Keyword: Sine-Gordon equation, soliton solutions, the classical mass.

PENDAHULUAN

Fenomena soliton dalam sains muncul di banyak bidang. Mulai dari fisika partikel, nuklir, zat padat, plasma, fluida, biofisika (misal DNA), neurosains, kosmologi, akustik, kontrol hingga teknologi informasi. Soliton merupakan gelombang soliter (sebuah paket gelombang atau pulsa) yang muncul dari tabrakan dengan pulsa (gelombang) yang sama dengan mempertahankan bentuknya sementara ia menjalar pada kecepatan konstan. Soliton disebabkan oleh efek non linier dan efek dispersif dalam medium. Efek dispersif merujuk pada hubungan dispersi (hubungan antara frekuensi dan kecepatan gelombang dalam medium). Soliton secara matematis merupakan solusi persamaan diferensial nonlinear yang memiliki energi total berhingga, terlokalisasi dalam ruang, bersifat stabil, dan tak menyebar. (Miftahul Hadi, 2005)

Penelitian ini bertujuan mencari hubungan partikel dengan soliton, dengan menggunakan persamaan non-linear Sine-Gordon yang mendeskripsikan solusi massa klasik soliton. Fenomena soliton pertama kali dideskripsikan oleh John Scott Russel yang mengamati gelombang soliter dalam kanal Eidenburg Glasgow pada tahun 1834. Persamaan Korteweg de Vries (KdV) menggambarkan gelombang dimensi dua yang merambat pada arah x dengan variasi yang lamban dalam arah y. Ketika dua gelombang itu bertumbukan, keduanya akan muncul dari tumbukan itu sebagai pasangan gelombang yang bergerak lain dengan satu fase pergantian sebagai satu-satunya akibat dari interaksi yang terjadi. Karena gelombang 'menyendiri' yang menghasilkan penyelesaian-penyelesaian itu seperti partikel, maka Zabusky dan Kruskal menamakan 'soliton' untuk menggambarkan gelombang 'menyendiri' tersebut (Kasman, tanpa tahun).

Gelombang yang memiliki bilangan gelombang berbeda menjalar pada kecepatan yang berbeda. Karakter inilah yang disebut gelombang dispersif. Secara matematis dapat dituliskan hubungan dispersif $\omega = \omega(k)$ dengan $\omega(k)$ bukan merupakan fungsi linear. Dengan demikian, seluruh solusi dari gelombang linear akan mengalami efek dispersi, yaitu pelebaran pulsa. Gelombang nonlinear yang menyebabkan pulsa gangguannya menyempit. Fenomena gelombang nonlinear diakibatkan sifat medium yang nonlinear. Ada hal yang menarik dari medium dispersif-nonlinear yang menghasilkan pulsa gelombang yang stabil yang disebut soliton. Beberapa sifat istimewa dari soliton adalah energi total berhingga, terlokalisasi dalam ruang, bersifat stabil, dan tak menyebar.

Mulanya, gelombang air tersebar pada kanal sempit dan efek nonlinear membuat ujung profil bagian kanan bergerak mendahului profil bagian kiri, hingga akhirnya gelombang pecah. Dengan efek dispersif, gelombang ini diseimbangkan oleh efek nonlinearitas, sehingga menghasilkan soliton yang stabil. Akibat dari sifat nonlinearitas, bentuk fungsi gelombang tidak lagi unik. Persamaan Sine-Gordon muncul sebagai model fenomena fisika dan persamaan evolusi lainnya untuk amplitudo dari beberapa gelombang lambat. Pada tahun 1939 Frenkel dan Kontorova menemukan bahwa persamaan Sine-Gordon menunjukkan dislokasi penjalaran secara periodik ditunjukkan oleh $\sin\psi$. Pada tahun 1962 Perring dan Skyrme menyatakan penjalaran gelombang nonlinear pada persamaan Sine-Gordon menunjukkan model partikel elementer (Drazin dan Johnson. 1989 : 199). Einstein juga memprediksikan bahwa beberapa sifat matematis dari persamaan nonlinear akan ditemukan untuk menjelaskan partikel elementer (Robert Herman. 1982 : 201)

Perumusan Lagrangian pada Mekanika Partikel dan Hamiltonian

Dalam mekanika klasik, sebuah partikel idealnya bisa dikatakan sebagai titik massa (*m*). Ambil saja posisi waktu *t* menjadi *x(t)* (Robert Hermann. 1982). Jika partikel tersebut berpindah ke suatu daerah dimana energi potensialnya adalah *V(x)*, kemudian hukum Newton yang kedua mengatakan bahwa,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{dV}{dx} \quad ...(1)$$

dimana *F* adalah gaya yang bekerja pada partikel. Prinsip gerak terkecil adalah cara untuk menurunkannya. Lagrangian (*L*) dirumuskan sebagai,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \quad ...(2)$$

dimana *T* dan *V* adalah energi kinetik dan energi potensial. Dengan konjuget rapat momentumnya adalah,

$$\Pi(x,t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad ...(3)$$

dan rapat Hamiltonianya adalah,

$$H(x,t) = \Pi\dot{\phi} - L \quad ...(4)$$

Faktor Exacta 9(4): 293-301, 2016
p-ISSN: 1979-276X
e- ISSN: 2502-339X

Medan Skalar Real
Prinsip variasi untuk suatu gerak, yaitu:

$$S = \int L(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) dx \qquad ...(5)$$

dimana $\partial_\mu \phi = \partial\phi/\partial x^\mu$.

Ini sangat tepat untuk memutuskan suatu kasus dimana L bergantung pada x^μ

$$L = L(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) \qquad ...(6)$$

ini terjadi jika ϕ berinteraksi dengan sumber luar, dan tidak dapat digambarkan dengan sistem tertutup.

Dalam 3-dimensi ruang (x, y, z) dianggap sebagai komponen dari sebuah 3-vektor, dan $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ adalah invarian dalam rotasi. Bentuk qudratik adalah jumlah kuadrat, dan definit positif. Untuk menggeneralisasi 4-dimensi ruang-waktu, maka ada sedikit masalah yang invarian intervalnya tidak lagi definit positif. Oleh kerena itu didefinisikan,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$
$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \qquad ...(7)$$

Oleh sebab itu,

$$\delta S = \int (\delta L + L \partial_\mu \delta x^\mu) dx \qquad ...(8)$$

dimana,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \qquad ...(9)$$

dengan $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi$, maka diberikan,

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(L\delta x^\mu)\right] dx \qquad ...(10)$$

Sehingga suku keduanya adalah,

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi\right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right] \delta\phi, \qquad ...(11)$$

Berdasarkan hasil integral total R maka dapat dituliskan integral permukaannya ∂R, dengan menggunakan 4 dimensi dari teorema Gauss, yakni

$$\delta S = \int_R \left\{\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\right\} \delta\phi \, dx + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + L\delta x^\mu\right] d\sigma_\mu \qquad ...(12)$$

Kini dapat disetujui bahwa variasi ϕ dan x^μ pada batas R hilang;

$$\delta\phi = 0, \qquad \delta x^\mu = 0 \text{ di } \partial R$$

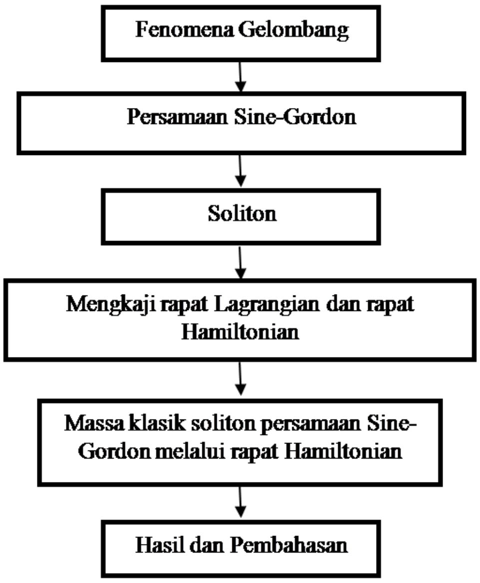
Jadi suku kedua pada persamaan (8) hilang dan kondisi untuk gerak stasioner suku pertama juga dihilangkan pada seluruh R, tanpa memperhatikan R,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right] = 0$$
...(13)

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu:

1. Melakukan perhitungan berdasarkan solusi soliton persamaan Sine-Gordon.
2. Mengkaji perumusan rapat Lagrangian dan rapat Hamiltonian yang menggambarkan persamaan Sine-Gordon.
3. Menghitung massa klasik soliton persamaan Sine-Gordon melalui rapat Hamiltonian. Berikut, alur penelitian yang dilakukan:



Gambar 1. Alur penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk baku persamaan Sine-Gordon satu dimensi dapat direpresentasikan sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin\phi = 0$$
...(14)

dimana $\sin\phi$ merupakan suku nonlinear yang membuat persamaan gelombang Sine-Gordon menjadi nonlinear.

Berdasarkan referensi (Fitri Susani. 2011), dari hasil analisis metode similaritas dengan menggunakan persamaan nonlinear diferensial parsial orde dua untuk mendapatkan solusi soliton persamaan Sine-Gordon dengan syarat batas satu soliton, maka didapatkan solusi satu soliton persamaan Sine-Gordon sebagai berikut:

$$\phi(x,t) = 4\, arctan\left[Ce^{2\gamma(kx-\omega t)}\right]$$
...(15)

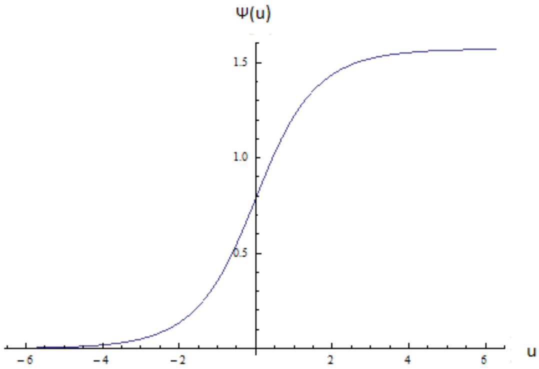
dengan memisalkan $u = (kx - \omega t)$.

Dimana, γ merupakan faktor kontraksi Lorentz yang memperlihatkan solusi soliton berkelakuan sebagai partikel yang relativistik. Dengan γ sebagai berikut,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
...(16)

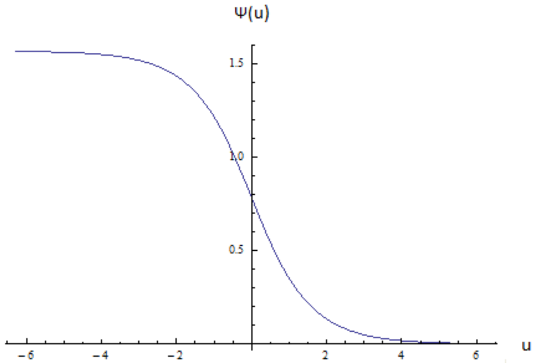
dan v adalah kecepatan soliton.

Hasil grafik persamaan $\phi(u) = 4\,arctan(Ce^{2\gamma u})$ untuk arah rambat ke kanan dengan C bernilai positif, menggunakan Software Mathematica 8.0 sebagai berikut,



Gambar 2. Grafik solusi kink persamaan $\phi(u) = 4\,\mathrm{arctan}(Ce^{2\gamma u})$

dan grafik untuk persamaan arah rambat ke kanan dengan C bernilai negatif sebagai berikut,



Gambar 3. Grafik solusi antikink persamaan $\phi(u) = 4\,\mathrm{arctan}(Ce^{2\gamma u})$

Selanjutnya mencoba mencari rapat Lagrangian dengan menggunakan Lagrangian ansatz,

$$L = A\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + C\cos\phi + D$$
...(17)

Berdasarkan persamaan dari Euler-Lagrange, maka untuk dimensi (1+1), yaitu

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0$$
...(18)

dimana, $\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] \rightarrow \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu$

dengan,

$$\partial_0\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^0} = \frac{\partial\phi}{\partial ct} = \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\partial_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$\partial_2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$\partial_3 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^3} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Maka,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi)}\right] - \frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_1 \phi)}\right] - \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_2 \phi)}\right] - \frac{\partial}{\partial x^3}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_3 \phi)}\right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\right)}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\right)}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial z}\phi\right)}\right] = 0$$

Sehingga persamaan Euler Lagrange nya menjadi:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\right)}\right] = 0$$

...(19)

Dengan memisalkan,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \phi_t$$

dan,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \phi_x$$

Maka bentuk persamaan Euler Lagrange nya menjadi,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_t}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_x}\right] = 0$$

Dari persamaan Sine-Gordon (14) untuk mendapat nilai A, B, dan C dari Lagrangian ansatz nya maka digunakanlah integral parsial biasa, sehingga

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\mathrm{C}\sin\phi$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi_t} = 2A\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi_x} = 2B\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

Lalu substitusikan ke dalam persamaan (19) sehingga didapatkan,

$$-C\sin\phi - \frac{\partial}{\partial t}2A\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}2B\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$$
$$-C\sin\phi - 2A\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) - 2B\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = 0$$

...(20)

Setelah itu bandingkan dengan persamaan Sine-Gordon untuk mendapatkan nilai A, B, dan C nya, dan didapatkan

$$A = -\frac{1}{2c^2} \;;$$
$$B = \frac{1}{2} \;;$$

$C = -1.$

Sehingga rapat Lagrangiannya adalah

$$L = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \cos\phi + D$$

...(21)

Berdasarkan referensi (P. G. Drazin. 1983), dengan mendeskripsikan tensor energi-momentum, maka diberikan persamaan,

$$\theta_v^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_v\phi - \delta_v^\mu L$$

...(22)

dimana, $\mu :\ (0,1,2,3)$

$v :\ (0,1,2,3)$

$\delta_v^\mu :\ Tensor\ variasi$

μ dan v merupakan indeks definit negatif untuk menggeneralisasi dimensi ruang-waktu 4 dimensi. $\delta_v^\mu = 1$ untuk μ dan v sama dengan nol.

Dengan syarat, $\mu = 0$ dan $v = 0$ akan didapatkan rapat Hamiltoniannya. Maka didapatkan,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \phi_t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t} - L \qquad \ldots(23)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \phi_t}.\frac{\partial\phi}{\partial t} - \left(-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \cos\phi + D\right)$$

$$= -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \cos\phi - D$$

$$= -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \cos\phi - D \qquad \ldots.(24)$$

Sehingga secara keseluruhan bentuk rapat Lagrangian dan rapat Hamiltonian yang diturunkan dirumuskan:

$$L = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \cos\phi + D$$

$$H = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \cos\phi - D$$

Dalam "Journal of Theoretical and Computational Studies: Soliton and Particle" oleh Hans Jacobus Wospakrik, massa klasik suatu soliton dapat dirumuskan melalui integrasi rapat Hamiltonian terhadap seluruh ruang, yaitu

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} H(x,t)\,dx$$

...(25)

dengan $H = -\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \cos\phi - D$, maka akan didapatkan massa klasik bergantung waktu sebagai berikut,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \cos\phi - D\right)dx$$

...(26)

Setelah di integralkan dengan software *Wolfram Mathematica* 8.0 maka didapatkan massa klasik Sine-Gordon dengan mengambil D, dengan nilai sebagai berikut:

D = -2

Divergen.

D = -1

$$M = \frac{\left(1 + 8k^2\gamma^2 - 8\frac{\omega^2\gamma^2}{c^2}\right)}{k\gamma}$$

D = 0

Divergen.

D = 1

$$M = -\frac{\left(1 + 8k^2\gamma^2 - 8\frac{\omega^2\gamma^2}{c^2}\right)}{k\gamma}$$

D = 2

Divergen.

Nilai massa klasik hanya ada dua kemungkinan nilainya antara M > 0 dan M = 0, sehingga nilai pada $\left(1 + 8k^2\gamma^2 - 8\frac{\omega^2\gamma^2}{c^2}\right)$ harus lebih besar dari nol, dan diasumsikan bilangan *k*, ω, *c*, dan γ adalah positif. Sedangkan, nilai massa klasik yang divergen merupakan kondisi soliton dengan massa yang tidak bernilai dan sifat soliton tersebut tidak terlokalisasi.

Tabel 1. Kondisi massa klasik soliton dengan variasi nilai D

D	Kondisi nilai massa klasik
-2	Divergen
-1	Konvergen, dengan Re (2kγ) > 0
0	Divergen
1	Konvergen, dengan Re (2kγ) > 0
2	Divergen

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan analisi data yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Massa klasik yang dihasilkan berbeda bergantung pada tiap-tiap nilai D dari uji coba Lagrangian yang diberikan. Ada yang konvergen dengan kondisi massa lebih besar dari nol dan ada pula yang divergen.
2. Solusi satu soliton persamaan Sine-Gordon menghasilkan dua solusi, yaitu kink atau antikink. Solusi kink menggambarkan gerak partikel gelombang nonlinear untuk arah rambat yang ke kanan dan solusi antikink menggambarkan gerak partikel gelombang nonlinear untuk rambat yang ke kiri.
3. Faktor kontraksi Lorentz yang terlihat dari solusi soliton pada persamaan Sine-Gordon ini menunjukkan gelombang soliton berkelakuan sebagai partikel yang relativistik.

DAFTAR PUSTAKA

Miftahul Hadi. 2005. **Berkenalan dengan Soliton**. Pusat Penelitian Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia. Diambil dari http://agorsilokusains.blogspot.co.id/2006/06/berkenalan-dengan-soliton.html

Wazwaz, Abdul Majid. 2009. **Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory**. Berlin: Springer.

Ahmad Ridwan, dkk. **Studi Teoritik Eksperimen Gelombang Permukaan Air dan Soliton pada Air Dangkal**. FMIPA Institut Teknologi Bandung. Bandung.

J. S. Russel. 1884. **Report on Waves**. Ref. 14th Meet. British.

Hermann, Robert. 1982. **Interdisciplinary Mathematics Volume XII.** Broolline. Math Science Press.

Ryder, Lewis H. 1985. **Quantum Field Theory Second Edition**. Cambridge University. Inggris.

P. G. Drazin. 1983**. Introduction to Solitons**. Cambridge University. Inggris.

Susani, Fitri. 2011. **Studi Solusi Persamaan Sine-Gordon**. Jakarta: Universitas Negeri Jakarta.

Wospakrik, Hans Jacobus. 2005. **Journal of Theoretical and Computational Studies: Soliton and Particle**. Volume 4 Number 0308. LIPI Puspitek Serpong. Tangerang, Indonesia.